

**BEHANDLUNG VERALLGEMEINERTER NICHTLINEARER
EIGENWERTPROBLEME MIT
LJUSTERNIK-SCHNIRELMANN – THEORIE**

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaft
am Fachbereich Mathematik
der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz

ACHIM LUDGER BONGERS
geb. in Krefeld

MAINZ 1979

BEHANDLUNG VERALLGEMEINERTER NICHTLINEARER
ENGWERTPROBLEME MIT
LJUNTERIK - SCHRIEDEMANN - THEORIE



DISSERTATION
zur Erlangung des Grades
des Doktors der Philosophie
an der Universität zu Köln

Digitized by the Internet Archive
in 2026

**BEHANDLUNG VERALLGEMEINERTER NICHTLINEARER
EIGENWERTPROBLEME MIT
LJUSTERNIK-SCHNIRELMANN – THEORIE**

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaft
am Fachbereich Mathematik
der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz

ACHIM LUDGER BONGERS
geb. in Krefeld

MAINZ 1979



Berichterstatter:

Prof.Dr.N.W.Bazley, Köln

Prof.Dr.W.Börsch-Supan, Mainz

Tag der mündlichen Prüfung: 5.Juli 1979

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung.....	1
§ 1 Ljusternik Schnirelmann Theorie für nicht notwendig beschränkte Mannigfaltigkeiten.....	5
§ 2 Rayleigh-Ritz-Galerkin Verfahren zur Berechnung kritischer Werte.....	21
§ 3 Normale und streng normale Werte.....	28
§ 4 Anwendungen.....	51
Bezeichnungen.....	73
Literaturverzeichnis.....	74
Lebenslauf.....	80

EINLEITUNG

Gegenstand der Ljusternik-Schnirelmann Theorie ist die Charakterisierung kritischer Werte eines reellwertigen Funktional g auf einer Mannigfaltigkeit M durch ein Variationsprinzip.

Unter bestimmten Voraussetzungen an g und M gelang es Ljusternik und Schnirelmann [30] zunächst in endlichdimensionalen Räumen zu zeigen, daß allein durch topologische Eigenschaften von M (Kategorie(M), Genus(M)) schon eine Mindestanzahl kritischer Punkte von g auf M garantiert ist. Ihre Arbeit stellte somit eine Verallgemeinerung der bekannten Maximum-Minimum Charakterisierung von Eigenwerten quadratischer Formen auf eine Klasse differenzierbarer Funktionen dar.

Seither ist diese Theorie in verschiedene Richtungen erweitert und verallgemeinert worden, etwa von Palais [36],[37] im Rahmen der Differentialtopologie auf unendlichdimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Andere Autoren [13] - [17],[21],[22],[28],[33],[34],[40],[41],[42],[48],[50] eröffneten der Ljusternik-Schnirelmann Theorie durch die Betrachtung solcher Mannigfaltigkeiten, die als Niveaulächen eines zweiten Funktional f gegeben sind, weite Anwendungsmöglichkeiten auf quasilineare, elliptische Eigenwertprobleme.

Die vorliegende Arbeit ist der Frage gewidmet, welche Eigenschaften von $f, g \in C^1(X, \mathbb{R})$ (X reflexiver Banachraum) dafür verantwortlich sind, daß mindestens $m \in \mathbb{N}$ topologisch kritische Werte von g auf $M_r(f) := \{u \in X \mid f(u) = r\}$, sprich Lösungen des Eigenwertproblems $g'(u) = \lambda \cdot f'(u)$, in $M_r(f)$ existieren.

Verlangt man (neben anderen, mehr technischen Voraussetzungen) von g Schwachstetigkeit auf X und außerdem, daß $M_r(f)$ eine beschränkte Mannigfaltigkeit ist, die jeder Strahl von Null aus genau einmal trifft, so kann man eine abzählbare Folge verschiedener Kritischer Punkte von g auf $M_r(f)$ finden. Denkt man an Eigenwertprobleme der Form

$$(*) \quad A(u) = \lambda \cdot u \quad u \in D(A) \subseteq H$$

mit ungeraden Potentialoperatoren $A := f'$, $I := g'$ in einem Hilbertraum H , so sind diese Voraussetzungen i.w. gleichbedeutend damit, daß A positiv und A^{-1} ein auf ganz H definierter, kompakter Potentialoperator ist (vgl. [31]). Erfüllt A diese Voraussetzungen nicht, etwa weil A ein selbstadjungierter, unbeschränkter Operator mit nicht rein diskretem Spektrum oder eine nichtlineare Störung eines solchen Operators ist, so kann man Ljusternik-Schnirelmann Theorie bisher nicht anwenden.

Diesen Mangel versucht die vorliegende Arbeit zu beheben:

Statt auf der durch A definierten Niveaufläche $M_r(f)$ des Funktionals f die kritischen Werte von g zu suchen, fragen wir umgekehrt nach den kritischen Werten von f auf den Niveauflächen von g .

Dies hat zur Folge, daß wir nun auf im allgemeinen unbeschränkten Mannigfaltigkeiten nach kritischen Werten nicht notwendig schwachstetiger Funktionale suchen müssen, andererseits kann man so die oftmals gegebene Monotonie von g' (vgl. (*)) besser ausnutzen und auch dann noch Aussagen über die Anzahl der Lösungen von $f'(u) = \lambda g'(u)$ mit $u \in M_r(g)$ gewinnen, wenn f' nicht positiv bzw. nicht kompakt invertierbar ist, also auch in Fällen, in denen keine abzählbare

Folge kritischer Werte von g auf $M_r(f)$ existiert.

Im ersten Abschnitt der vorliegenden Arbeit untersuchen wir daher die Voraussetzungen an f und g , unter denen auch ohne die Beschränktheit von $M_r(g)$ noch die Existenz kritischer Werte von f auf $M_r(g)$ nachgewiesen werden kann. Wir führen die Menge der normalen Werte des Paares $(f, M_r(g))$ als Teilmenge der Werte ein, in denen $f|_{M_r}$ die Palais-Smale Bedingung (C) erfüllt und zeigen, daß das Genus $(\hat{f}^C)$ eine untere Schranke für die Anzahl der Lösungen des Eigenwertproblems $f'(u) = \lambda \cdot g'(u)$ angibt, sofern $(-\infty, c]$ aus solchen normalen Werten des Paares (f, M_r) besteht.

Im zweiten Abschnitt steht die Frage nach der Konvergenz von Rayleigh-Ritz Verfahren zur Berechnung der Ljusternik-Schnirelmann kritischen Werte im Vordergrund unseren Interesses. Wir zeigen, daß im Intervall $(-\infty, c]$ mindestens $\gamma(\hat{f}^C)$ kritische Werte von $f|_{M_r}$ existieren, die sich durch konvergente Rayleigh-Ritz Verfahren näherungsweise berechnen lassen, sofern nur $(-\infty, c]$ aus streng normalen Werten des Paares (f, M_r) besteht. Mit $\gamma(A)$ bezeichnen wir das Kompakt-Genus der Menge A .

Im dritten Kapitel versuchen wir für speziellere Funktionale f und g die Menge der (streng) normalen Werte von $(f, M_r(g))$ zu bestimmen, etwa wenn f konvex, f' die Bedingung (S_1) bzw. (S_0) erfüllt, oder aber f' die Form $f'(u) = Lu + N(u)$ in einem Hilbertraum H hat, wobei L einen unbeschränkten, selbstadjungierten, nicht notwendig kompakt invertierbaren Operator und N eine nichtlineare Störung bezeichnet.

Insbesondere stellen wir in diesem Kapitel den Zusammenhang mit Arbeiten anderer Autoren her und leiten teilweise deren Resultate als Spezialfälle unserer Ergebnisse ab.

Im letzten Kapitel werden auf eine Reihe von Beispielen nichtlinearer Eigenwertprobleme der mathematischen Physik (Klein-Gordon Gleichung, Choquard Gleichung, Hartree Gleichung für He, etc.) die gewonnenen Ergebnisse angewendet.

Ich möchte Herrn Prof. Dr. N.W.Bazley für die Anregung zu dieser Arbeit, sein stetes Interesse an ihrem Fortgang und manch wertvollen Ratschlag besonders danken. Außerdem danke ich Herrn Prof. Dr. O.E.Polansky vom Max-Planck Institut für Strahlenchemie in Mülheim a.d.Ruhr für die freundliche Förderung der Arbeit. Wichtige Hilfen waren auch die Diskussionen mit Herrn Dr.H.P.Heinz, die wesentlich zum Entstehen der Arbeit in der vorliegenden Form beitrugen.

§ 1 Ljusternik Schnirelmann Theorie für nicht notwendig beschränkte Mannigfaltigkeiten

Wir betrachten Eigenwertprobleme der Form

$$(1.1) \quad f'(u) = \lambda \cdot g'(u) \quad u \in X$$

und fragen nach der Existenz von Lösungen. Dazu

benutzen wir Methoden der Variationsrechnung, d.h.:

wir untersuchen die Anzahl der kritischen Punkte des

Funktional $f(u)$ auf Mannigfaltigkeiten $M_r := \{u \in X \mid g(u) = r\}$.

Es interessieren uns besonders zwei Fälle, die bisher nicht untersucht wurden :

- i) die Mannigfaltigkeit M_r ist nicht beschränkt in X ,
- ii) der Operator $f': X \rightarrow X^*$ ist nicht kompakt.

Hauptergebnis ist der Existenzsatz (1.17), welcher die früheren Ergebnisse von Amann [1], Coffmann [19], Vainberg [4], et. al. verallgemeinert.

Während der ganzen Arbeit werden wir, sofern nichts anderes gesagt wird, die folgenden Voraussetzungen an f und g stellen :

- (A) f, g sind gerade C^1 -Funktionale auf dem gleichmäßig konvexen, unendlichdimensionalen Banachraum X mit $f(0) = g(0) = 0$. Ihre Gradienten $F(u)$ bzw. $G(u)$ sind gleichmäßig stetig auf beschränkten Teilmengen von X .

- (B) $M_r := \{u \in X \mid g(u) = r\}$ wird von jedem Strahl aus θ genau einmal getroffen; für $u \in X \setminus \{\theta\}$ ist $(G(u), u) > 0$ und für $u \in M_r$ gilt $(G(u), u) \geq d(r) > 0$.
 f ist auf M_r nach unten beschränkt.

Bemerkung

Durch geeignete Wahl des Banachraumes X lassen sich die Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsvoraussetzungen unter (A) im allg. erfüllen.

Es werden hier noch keine Voraussetzungen an das Wachstum von f bzw. g gestellt, insbesondere kann also die Mannigfaltigkeit M_r auch unbeschränkt in X sein.

Bezeichnung

Mit $\hat{f}$ werden wir im folgenden die Einschränkung des Funktional $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ auf M_r bezeichnen: $\hat{f} := f|_{M_r}$.

Unter f_a^b verstehen wir die Menge $\{u \in X \mid a \leq f(u) \leq b\}$ und definieren $f^b := f_{-\infty}^b$ sowie $f_a := f_a^{+\infty}$.

Aus den Voraussetzungen in (B) lassen sich einige Eigenschaften der Mannigfaltigkeit M_r herleiten; diese beschreiben wir mit einer Strahlabbildung s , welche jedem von Null verschiedenen Punkt $u \in X$ eine Länge $s(u)$ zuordnet, derart daß $s(u)u$ auf M_r liegt.

(1.2) LEMMA

- a) Die Abbildung $s: X \setminus \{\theta\} \rightarrow (0, \infty)$ ist durch die Vorschrift $g(s(u)u) = r$ auf $X \setminus \{\theta\}$ wohldefiniert, gerade und stetig.

- b) Auf $X \setminus \{0\}$ ist s stetig Frechet- differenzierbar und die Frechetableitung von s im Punkt u hat die Gestalt

$$d_u s = \frac{-s(u) \cdot G(s(u)u)}{(G(s(u)u), u)} \quad .$$

- c) Auf beschränkten Mengen ist s von Null wegbeschränkt.

Für $u \in M_r$ gilt $s(u) = 1$.

- d) Auf beschränkten, konvexen Teilmengen S von $X \setminus \{0\}$ gilt:

s ist beschränkt auf $S \implies s$ ist gleichmäßig stetig auf S

- e) Für $u \in M_r$ und $v \in X$ gilt : $(G(u), v) = 0 \iff d_u s(v) = 0$.

- f) Für $u \in X \setminus \{0\}$ und $t > 0$ gilt : $s(u) = s(tu)t$.

Beweis

a) ist eine Konsequenz der Voraussetzung (B).

b) folgt mit dem Satz über implizit definierte Funktionen.

c) M_r ist von Null wegbeschränkt, also gilt für $u \in X \setminus \{0\}$ und ein $k > 0$:

$$(1.3) \quad |s(u)| \cdot \|u\| = \|s(u)u\| \geq k$$

d) Ist s beschränkt auf S , so muß S von Null wegbeschränkt sein (s. (1.3)). Also ist für alle $t \in [0, 1]$ und $x, y \in S$

das Element $tx + (1-t)y$ von Null verschieden und man hat :

$$|s(x) - s(y)| = \left| \int_0^1 (s'(x + t(y-x)), x-y) dt \right| \stackrel{b)}{\leq} \sup_{u \in S} |s(u)| \cdot \sup_{u \in S} \|G(s(u)u)\| \cdot \frac{\|x-y\|}{d(r)}$$

Da G ein beschränkter Operator ist, folgt hieraus die gleichmäßige Stetigkeit von s auf S .

f) Die Behauptung folgt unmittelbar aus $s(tu)tu = s(u)u$.



Kompaktheitsvoraussetzungen

Es ist für die Untersuchung der kritischen Werte des Funktional
 $f(u)$ in einem unendlichdimensionalen Banachraum notwendig, gewisse
 Kompaktheitsvoraussetzungen an f zu stellen. Dies geschieht stets,
 wenn auch oft in impliziter Form, durch die folgende, von Palais
 eingeführte Bedingung (C).

(1.4) DEFINITION

Ist $\hat{f}: M \rightarrow \mathbb{R}$ ein C^1 -Funktional auf einer Finslermannigfaltigkeit M ,
 so sagt man :

$\hat{f}$ erfüllt die Palais-Smale Bedingung (C) : $\Longleftrightarrow$

Jede Folge $\{u_n\}$, für die $\hat{f}(u_n)$ beschränkt, aber $\|d_{u_n} \hat{f}\|$ nicht
 von Null wegbeschränkt ist, enthält eine konvergente Teilfolge.

Die Nachprüfung dieser P.S.Bedingung (C) für konkrete Probleme
 gestaltet sich meist schwierig. Das folgende Lemma wird uns später
 helfen, für Probleme der Form (1.1) obige Bedingung $\|d_{u_n} \hat{f}\| \rightarrow 0$
 näher zu charakterisieren:

(1.5) LEMMA

Für $u \in X \setminus \{0\}$ sei $\lambda(u) := (F(u), u) / (G(u), u)$ und $\alpha(u) := \frac{\|G(u)\|_{X^*} \|u\|_X}{|(G(u), u)|}$

Dann gilt für beliebiges $u \in M_r$:

- a) $\|F(u) - \lambda(u)G(u)\|_{X^*} \leq (1 + \alpha(u)) \cdot \|d_u \hat{f}\| \leq (1 + \alpha(u)) \cdot \|F(u) - \lambda(u)G(u)\|_{X^*}$
- b) $d_u \hat{f} = 0 \iff F(u) = \lambda(u)G(u).$

Beweis

Für $u \in M_r$ kann man den Tangentialraum $T_u(M_r)$ an M_r im Punkte $u \in M_r$
 identifizieren mit einem Unterraum X_u von X , der gegeben ist durch:

$$X_u := \{t \in X \mid (G(u), t) = 0\}$$

Definiert man das Funktional $b: X \rightarrow \mathbb{R}$ für $x \in X$ durch $b(x) := \frac{(G(u), x)}{(G(u), u)}$,
so gilt für $x \in X$:

- i) $t_x := x - b(x)u \in X_u$
- ii) $\|b(x)u\| \leq \alpha(u) \cdot \|x\|$ sowie
- iii) $\lambda(u)(G(u), x) = (F(u), b(x)u)$.

Daher hat man für beliebiges $x \in X$:

$$\begin{aligned} |(F(u) - \lambda(u)G(u), x)| &= |(F(u), x - b(x)u)| = |(F(u), t_x)| = \\ &= |d_u \hat{f}(t_x)| \leq \|d_u \hat{f}\| \cdot \|t_x\| \\ &= \|d_u \hat{f}\| \cdot \|x - b(x)u\| \leq \|d_u \hat{f}\| \cdot \|x\| \cdot (1 + \alpha(u)). \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar die erste Abschätzung in a).

Da andererseits für beliebiges $t \in T_u(M_r) = X_u$ gilt:

$$|d_u \hat{f}(t)| = |(F(u), t)| = |(F(u) - \lambda(u)G(u), t)| \leq \|F(u) - \lambda(u)G(u)\| \cdot \|t\|$$

folgt auch der zweite Teil der Behauptung in a). ▲

Mit Hilfe von Lemma (1.5) kann man nun unmittelbar schließen:

(1.6) KOROLLAR

Erfüllt $\hat{f}$ die Palais-Smale Bedingung (C), so ist die Menge K_d kompakt in X . Mit K_d bezeichne $K_d := \{u \in M_r \mid f(u) = d \text{ und } F(u) = \lambda G(u)\}$.

Wie das folgende Beispiel zeigt, ist die Verwendbarkeit obiger Palais-Smale Bedingung (C) stark eingeschränkt. Schon im einfachsten Fall, nämlich dem eines selbstadjungierten, kompakten Operators, ist sie nicht erfüllt:

(1.7) BEISPIEL

Ist $A: H \rightarrow H$ ein kompakter, selbstadjungierter Operator in einem reellen Hilbertraum H , $f(u) := \frac{\langle Au, u \rangle}{2}$ und $g(u) := \frac{\|u\|^2}{2}$, so erfüllt $\hat{f} := f|_{M_r}$ nicht die Palais-Smale Bedingung (C).

Beweis :

Wähle als Folge $\{u_n\}$ eine Orthonormalbasis in H bestehend aus Eigenfunktionen von A . Dann gilt $u_n \rightarrow 0$, $f(u_n) \rightarrow 0$, $g(u_n) = 1/2$ und $\|d_{u_n} \hat{f}\| = 0$, aber $\{u_n\}$ enthält keine konvergente Teilfolge. ▲

Reeken[40] führte eine andere Kompaktheitsbedingung ein, die einen mehr lokalen Charakter hat insofern, als nur noch solche Folgen $\{u_n\}$ betrachtet werden, für die $f(u_n)$ gegen einen festen Wert $d \in \mathbb{R}$ konvergiert.

(1.8) DEFINITION (vgl.: Reeken [40])

Ist $\hat{f}: M \rightarrow \mathbb{R}$ ein C^1 -Funktional auf einer Finslermannigfaltigkeit M , so sagt man:

die Zahl $d \in \mathbb{R}$ ist ein normaler Wert von $\hat{f}$: $\Longleftrightarrow$

wenn jede Folge $\{u_n\}$ aus M , für die $\hat{f}(u_n)$ gegen d konvergiert und $\|d_{u_n} \hat{f}\|$ nicht von Null wegbeschränkt ist, eine konvergente Teilfolge enthält.

(1.9) KOROLLAR

Besteht ganz $\mathbb{R}$ aus normalen Werten von $\hat{f}$, so erfüllt f die Palais-Smale Bedingung (C).

Da wir im folgenden auch unbeschränkte Mannigfaltigkeiten betrachten wollen, reicht es nicht aus, sich auf die normalen Werte von $\hat{f}$ zu beschränken. Vielmehr müssen wir auch eine gewisse Gutartigkeit der Mannigfaltigkeit M_r in einer Umgebung der Menge $\hat{f}^{-1}(d)$ fordern, sofern d normaler Wert von f ist. Aus diesem Grunde definieren wir:

(1.10) DEFINITION

Wir nennen eine Zahl $d \in \mathbb{R}$ normalen Wert des Paares (f, M_r) : $\Leftrightarrow$

- i) d ist normaler Wert von $\hat{f} := f|_{M_r}$ und
- ii) es gibt Zahlen $\varepsilon, \delta > 0$, so daß die Abbildung s aus (1.2) beschränkt ist auf der δ -Umgebung U_δ von $\hat{f}_{d-\varepsilon}^{d+\varepsilon}$.

(1.11) LEMMA

Ist M_r beschränkt in X , so gilt :

$d \in \mathbb{R}$ ist normaler Wert des Paares (f, M_r) dann und nur dann, wenn d normaler Wert von $\hat{f}$ ist.

Beweis :

Aus der Beschränktheit von M_r folgt für beliebiges $u \in X \setminus \{0\}$:

$$|s(u)| = \frac{|s(u)| \cdot \|u\|}{\|u\|} = \frac{\|s(u)u\|}{\|u\|} \leq \frac{\text{const}}{\|u\|}.$$

Da andererseits M_r von Null wegbeschränkt ist, gibt es eine δ -Umgebung von M_r , die ebenfalls von Null wegbeschränkt ist. Für dieses $\delta > 0$ und beliebiges $\varepsilon > 0$ ist die Bedingung ii) aus Definition (1.10) stets erfüllt.



(1.12) LEMMA

Für beschränkte Teilmengen J von $\mathbb{R}$ sei $\hat{f}^{-1}(J)$ beschränkt in X .

Beh.: Gilt für beschränkte Folgen $\{u_n\} \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} g(u_n) = r \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s(u_n) = 1$, so sind alle normalen Werte von $\hat{f}$ auch normale Werte des Paares (f, M_r) .

Beweis :

Anderenfalls könnte man zu einem normalen Wert $d \in \mathbb{R}$ eine Folge

$u_n \in U_{1/n}(\hat{f}_{d-1/n}^{d+1/n})$ finden mit $s(u_n) \geq n$. Zu diesen $\{u_n\}$ existiert dann auch eine Folge $v_n \in M_r$ mit : $g(v_n) = r$, $|f(v_n) - d| \leq 1/n$ und $\|u_n - v_n\| \leq 1/n$.

Die Folgen $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ sind nach unseren Voraussetzungen beschränkt in X , somit folgt aus der gleichmäßigen Stetigkeit von g auf beschränkten Teilmengen von X : $\lim_{n \rightarrow \infty} g(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(v_n) = r$ und daraus nach Voraussetzung $\lim_{n \rightarrow \infty} s(u_n) = 1$ im Widerspruch zur Annahme. $\blacktriangle$

Bemerkung

Mit Hilfe des weiter unten bewiesenen Lemmas (1.20) kann man auch die Umkehrung der Behauptung von (1.12) zeigen.

Genus einer Menge :

Bezeichnet man mit Σ die Menge aller abgeschlossenen, symmetrischen Teilmengen von $X \setminus \{\emptyset\}$, so definiert man für $A \in \Sigma$:

(1.13) DEFINITION (vgl. etwa Coffmann [19])

Die Menge $A \in \Sigma$ hat Genus n (i.Z.: $\text{Genus}(A) = n$) : $\iff$

$n \in \mathbb{N}$ ist die kleinste natürliche Zahl, für die eine ungerade, stetige Abbildung $\varphi \in C(A, \mathbb{R}^n \setminus \{\emptyset\})$ existiert.

Existiert kein solches $n \in \mathbb{N}$, so definiere $\text{Genus}(A) := +\infty$.

Ferner sei $\text{Genus}(\emptyset) = 0$.

Für spätere Verweise stellen wir im folgenden Lemma die wichtigsten Eigenschaften des Genus zusammen:

(1.14) LEMMA ([19], [50])

Für $A, B \in \Sigma$ gilt :

- a) $\text{Genus}(A) \leq \text{Genus}(B)$, falls eine ungerade Abbildung $\varphi \in C(A, B)$ existiert.
- b) $A \in B \implies \text{Genus}(A) \leq \text{Genus}(B)$.

- c) Ist ψ ungerader Homeomorphismus von A auf B , so gilt $\text{Genus}(A) = \text{Genus}(B)$.
- d) $\text{Genus}(A \cup B) \leq \text{Genus}(A) + \text{Genus}(B)$.
- e) Ist A kompakt, so gilt: $\text{Genus}(A) < +\infty$.
- f) Ist $\text{Genus}(B) < +\infty$, so gilt: $\text{Genus}(\overline{A-B}) \geq \text{Genus}(A) - \text{Genus}(B)$.
- g) Ist A kompakt, so gibt es eine δ -Umgebung $U_\delta(A)$ um A mit $\text{Genus}(\overline{U_\delta(A)}) = \text{Genus}(A)$.
- h) Bezeichnet S^{n-1} die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^n$, so gilt: $\text{Genus}(S^{n-1}) = n$.
- i) $\text{Genus}(A) = n \iff$ Es existieren $A_1, \dots, A_n \in \Sigma$ mit $\text{Genus}(A_i) = 1$ und $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$, dabei ist $n \in \mathbb{N}$ die kleinstmögliche solche Zahl.
- k) Ist H ein Hilbertraum und V ein n -dimensionaler Unterraum von H , sowie $A \in \Sigma$ mit $A \cap V^\perp = \emptyset$, so gilt $\text{Genus}(A) \leq n$.
- l) Für jede absteigende Folge $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ kompakter Mengen aus Σ gilt mit $A := \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$: $\text{Genus}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Genus}(A_i)$.

(1.15) Bemerkung

Andere Autoren ([3], [3], [3], [3]) benutzen anstelle des Genus einer Menge die Lusternik-Schnirelmann Kategorie bzw. die Ordnung einer Menge. Diese Begriffe sind jedoch im folgenden Sinne äquivalent:

(1.16) LEMMA

- a) Ist $A \in \Sigma$, so gilt: $\text{Ordnung}(A) = \text{Genus}(A) + 1$.
- b) Ist A zusätzlich kompakt, so gilt auch: $\text{Genus}(A) = \text{p-cat}_{X \setminus \{\emptyset\}}(A)$.

Beweis

Wir zeigen nur a), für den Beweis von b) siehe [38].

Sei $\text{Genus}(A) = k$ und $\varphi: A \rightarrow S^{k-1}$ die dann existierende ungerade, stetige Abbildung. Da für die Ordnung (1.14) a) analog gilt, hat man: $\text{Ordnung}(A) \leq \text{Ordnung}(\varphi(A)) \leq \text{Ordnung}(S^{k-1}) = k+1 = \text{Genus}(A) + 1$.

Ist andererseits $\text{Ordnung}(A) = k+1$, so existieren $k+1$ abgeschlossene Mengen B_i mit $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k+1} B_i$ und $B_i \cap -B_i = \emptyset$. Setze für $i \in \{1, \dots, k+1\}$ $A_i := B_i \cup -B_i$. Dann ist $\text{Genus}(A_i) = 1$ und $A \subseteq \bigcup_{i=1}^k A_i$. Wäre letzteres nämlich nicht der Fall, so kann man ein $x \in A$ finden, welches in keinem der A_i für $i \in \{1, \dots, k\}$ liegt. Damit muß x Element von B_{k+1} sein, denn die Mengen $\{B_i\}_{i=1}^{k+1}$ überdecken A . Da $B_{k+1} \cap -B_{k+1} = \emptyset$ ist, liegt $-x$ zwar in A , nicht aber in B_{k+1} , also in einem anderen B_j mit $j \in \{1, \dots, k\}$. Nach Konstruktion von A_j gehört x zu A_j im Widerspruch zur Annahme. Damit gilt nun: $\text{Genus}(A) + 1 \leq \text{Genus}\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) + 1 \leq k+1 = \text{Ordnung}(A)$. Also gilt $\text{Genus}(A) + 1 = \text{Ordnung}(A)$ und a) ist bewiesen. 

Wir geben hier dem Genus einer Menge den Vorzug, da die Beweise im allgemeinen einfacher werden. Dies liegt vermutlich daran, daß man es beim Genus mit stetigen Funktionen, bei Kategorie und Ordnung jedoch mit Deformationen und antipoden Punkten zu tun hat.

Existenzsatz für kritische Werte

Mit den obigen Bezeichnungen sind wir nun in der Lage, aus der Existenz normaler Werte auf die Existenz kritischer Punkte zu schließen, ohne die Beschränktheit der Mannigfaltigkeit M_r vorauszusetzen.

(1.17) SATZ

Die Voraussetzungen (A), (B) seien für die Funktionale f, g erfüllt. Es bestehe für ein $c \in \mathbb{R}$ das Intervall $(-\infty, c]$ aus normalen Werten des Paares (f, M_r) und es sei $\text{Genus}(\hat{f}^c) \geq m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Für beschränkte Intervalle $J \subseteq \mathbb{R}$ sei $\hat{f}^{-1}(J)$ beschränkt in X .

Beh.:

a) Es gibt mindestens $2m$ verschiedene Lösungen des Eigenwertproblems

$$F(u) = \lambda \cdot G(u) \quad \text{mit } u \in M_r.$$

b) Die Zahlen $\{b_j\}_{j=1}^m$, die definiert sind durch

$$b_j := \inf_{A \in \mathbb{Z}, A \in M_r, \text{Genus}(A) \geq j} \sup_{u \in A} f(u) \quad (j=1(1)m)$$

sind kritische Werte von f auf M_r .

c) Gilt für ein $j \in \{1, \dots, m\}$: $b_j = b_{j+1} = \dots = b_{j+q-1}$ so ist $\text{Genus}(K_{b_j}) \geq q$ wobei $K_d := \{u \in M_r \mid f(u)=d \text{ und } F(u)=\lambda G(u)\}$.

Der Beweis des Satzes stützt sich im wesentlichen auf die folgenden fünf Hilfssätze:

(1.18) BEZEICHNUNGEN

- (i) Es sei $\Gamma: X \setminus \{0\} \rightarrow X^*$ definiert durch $\Gamma(u) := F(u) - \frac{(F(u), u)}{(G(u), u)} \cdot G(u)$.
- (ii) Bezeichne mit $J: X^* \rightarrow X$ eine Dualitätsabbildung mit:

$$(x, J(x)) = \|x\|^2 = \|J(x)\|^2 \quad \text{für alle } x \in X^*.$$
- (iii) Es sei $D: X \setminus \{0\} \rightarrow X$ definiert durch:

$$D(u) := J(\Gamma(u)) - \frac{(G(u), J(\Gamma(u)))}{(G(u), u)} u.$$

(1.19) HILFSSATZ

Für alle $u \in M_r$ gilt:

- a) $(\Gamma(u), u) = 0$
- b) $(G(u), D(u)) = 0$
- c) $(F(u), D(u)) = \|\Gamma(u)\|^2$
- d) J ist auf beschränkten Mengen von X gleichmäßig stetig.
- e) Auf beschränkten Teilmengen von M_r ist D gleichmäßig stetig.

(1.20) HILFSSATZ

Ist $d \in \text{TR}$ normaler Wert des Paares (f, M_r) , so gibt es Zahlen $\varepsilon, \tau > 0$ derart, daß die Abbildungen s und s' (vgl. Lemma (1.2)) gleichmäßig stetig sind auf $U_\delta(\hat{f}_{d-\varepsilon}^{d+\varepsilon})$.

(1.21) HILFSSATZ

Ist $d \in \text{TR}$ normaler Wert des Paares (f, M_r) , so gibt es Zahlen $\varepsilon, \tau > 0$ derart, daß die Abbildung $\Psi(u, t) := s(u+tD(u))(u+tD(u))$

a) wohldefiniert, gleichmäßig stetig und in u ungerade ist für

$$(u, t) \in \hat{f}_{d-\varepsilon}^{d+\varepsilon} \times [-\tau, \tau] \text{ sowie}$$

b) die Beziehung

$$(1.22) \quad f(\Psi(u, t)) = f(u) + t \|f'(u)\|^2 + tr(u, t)$$

erfüllt, wobei der "Rest" $r(u, t)$ gleichmäßig auf $\hat{f}_{d-\varepsilon}^{d+\varepsilon}$ für $t \rightarrow 0$ gegen Null konvergiert.

(1.23) HILFSSATZ

Ist $d \in \text{TR}$ normaler Wert des Paares (f, M_r) und N eine offene Umgebung von K_d , so gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine ungerade, stetige Abbildung $\tilde{\Phi}$ mit $\tilde{\Phi}(\hat{f}_{d-\varepsilon}^{d+\varepsilon} \cap N) \subseteq \hat{f}_{d-\varepsilon}^{d+\varepsilon}$.

(1.24) HILFSSATZ

Die Zahlen $b_1, \dots, b_m$ sind wohldefiniert und normale Werte des Paares (f, M_r) .

(1.25) Bemerkungen

Die Betrachtung solcher Deformationen $\tilde{\Phi}$ aus (1.23) geht auf Ljusternik bzw. Schnirelmann zurück. Palais gab ihre allgemeine Konstruktionsmöglichkeit als Flußlinien von Gradientenvektorfeldern auf Finslermannigfaltigkeiten an [30], [36], [37].

Da wir hier nur spezielle Mannigfaltigkeiten betrachten, nämlich solche, die als Äquipotentialflächen eines differenzierbaren Funktionals g gegeben sind, sind wir in der Lage, die Abbildung $\tilde{\Phi}$ explizit anzugeben.

Im Beweis verfolgen wir weitgehend den von Amann vorgeschlagenen Weg; da wir jedoch auch unbeschränkte Mannigfaltigkeiten zulassen, sind einige Zusatzüberlegungen und Modifikationen notwendig. Auch verwenden wir eine andere Deformationsabbildung $\tilde{\Phi}$ als in [41], [30].

Beweis zu (1.19)

a) und b) sind trivial; c) folgt aus

$(F(u), D(u)) = (\Gamma(u), D(u)) = (\Gamma(u), J(\Gamma'(u))) = \|\Gamma'(u)\|^2$ und d) ist eine Folge der gleichmäßigen Konvexität von X (siehe Kato [36]).

e) D ist als Komposition gleichmäßig stetiger Abbildungen selbst gleichmäßig stetig auf beschränkten Teilmengen von M_r . ▲

Beweis zu (1.20)

Da $d \in TR$ normaler Wert des Paares (f, M_r) ist, kann man Zahlen $\varepsilon, \delta > 0$ finden, derart daß s beschränkt ist auf $U_{2\delta}(\hat{r}_{d-\varepsilon}^{d+\varepsilon})$. Da diese Umgebung beschränkt ist, existieren Zahlen $C_1, C_2, C_3 > 0$ mit der Eigenschaft:

$|s(u)| \leq C_1$, $\|s(u)u\| \leq C_2$, und $\|G(s(u)u)\| \leq C_3$ für alle $u \in U_{2\delta}(\hat{r}_{d-\varepsilon}^{d+\varepsilon})$.

Ist nun $\eta > 0$ beliebig, $\gamma := \min\{\delta, (d(r) \cdot \eta) / (C_1^2 C_3)\}$, so gilt für

beliebige $x, y \in U_\delta(\hat{r}_{d-\varepsilon}^{d+\varepsilon})$ mit $\|x - y\| \leq \gamma$:

$x+t(y-x)$ liegt in $U_{\delta}(\hat{f}_{d-\epsilon}^{d+\epsilon})$ für $t \in [0,1]$ und es ist

$$\begin{aligned} |s(x) - s(y)| &= \left| \int_0^1 (s'(x+t(y-x)), y-x) dt \right| \\ &\leq \|x-y\| \cdot \sup_{u \in U_{\delta}} \left\| \frac{s^2(u)G(s(u)u)}{(G(s(u)u), s(u)u)} \right\| \\ &\leq \|x-y\| \frac{C_1^2 \cdot C_3}{d(\frac{r}{2})} \leq \eta. \end{aligned}$$

$s'(u) = \frac{s^2(u)G(s(u)u)}{(G(s(u)u), s(u)u)}$ ist als Komposition gleichmäßig stetiger Abbildungen gleichmäßig stetig auf $U_{\delta}(\hat{f}_{d-\epsilon}^{d+\epsilon})$. ▲

Beweis zu (1.21)

Wähle ϵ, δ wie in (1.20) und bestimme $\tau > 0$ so, daß der Ausdruck $u+tD(u)$ für $|t| \leq \tau$ und $u \in \hat{f}_{d-\epsilon}^{d+\epsilon}$ in $U_{\delta}(\hat{f}_{d-\epsilon}^{d+\epsilon})$ liegt. Dies ist wegen (1.19) e) stets möglich. Dann ist Ψ wohldefiniert auf $\hat{f}_{d-\epsilon}^{d+\epsilon} \times [-\tau, \tau]$ und dort nach (1.19), (1.20) gleichmäßig stetig. Die Gültigkeit von (1.22) rechnet man analog zu [1] nach mit :

$$\begin{aligned} r(u, t) &:= (F(\Psi(u, t)), D(u)) \cdot \{s(u+tD(u)) - s(u)\} \\ &\quad + (F(\Psi(u, t)), u+tD(u)) \cdot (s'(u+tD(u)) - s'(u), D(u)) \\ &\quad + (F(\Psi(u, t)) - F(u), D(u)) \end{aligned}$$

wobei $G = G(u)$ zwischen 0 und t liegt. Wegen (1.20), (1.21) a) und $\Psi(u, 0) = u$ gilt auch der letzte Teil der Behauptung. ▲

Beweis zu (1.23)

Es genügt, die Behauptung für eine δ -Umgebung von K_d zu beweisen, die noch ganz in N enthalten ist, (solch eine Umgebung existiert, da K_d kompakt ist) denn die allgemeine Behauptung ergibt sich dann aus $\bar{U}(\hat{f}_{d-\epsilon}^{d+\epsilon} N) \subseteq \bar{U}(\hat{f}_{d-\epsilon}^{d+\epsilon} U_{\delta}(K_d)) \subseteq \hat{f}_{d-\epsilon}^{d+\epsilon}$.

(i) Es gibt Zahlen $\epsilon_1, \rho > 0$, so daß für alle $u \in \hat{f}_{d-\epsilon_1}^{d+\epsilon_1} \setminus U_{\delta}(K_d)$ gilt $\|F(u)\| \geq \rho$.

Im anderen Fall könnte man eine Folge $u_n \in M_r \setminus U_\delta(K_d)$ finden mit:
 $f(u_n) \rightarrow d$ und $\|\Gamma'(u_n)\| \rightarrow 0$. Weil $d \in \mathbb{R}$ normaler Wert von f ist,
 besitzt diese Folge einen kritischen Punkt $u \in K_d$ als Häufungspunkt
 im Widerspruch zu $u_n \notin U_\delta(K_d)$.

(ii) Nach (1.21) gibt es Zahlen $\varepsilon_2, \tau_1 > 0$, für die $\mathcal{V}(u, t)$ wohldefiniert
 ist auf $\hat{f}_{d-\varepsilon_2}^{d+\varepsilon_2} \times [-\tau_1, \tau_1]$ und dort (1.22) erfüllt.

(iii) Weil $r(u, t)$ gleichmäßig in $u \in \hat{f}_{d-\varepsilon_2}^{d+\varepsilon_2}$ mit $t \rightarrow 0$ selbst gegen Null
 konvergiert, gibt es ein $\tau \in (0, \tau_1)$, so daß für alle $u \in \hat{f}_{d-\varepsilon_2}^{d+\varepsilon_2}$ und $|t| \leq \tau$
 gilt: $|r(u, t)| \leq \rho^2/2$.

(iv) Setze nun $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \frac{\rho^2 \tau}{4}\}$ und definiere

$$\bar{\Phi}(u) := \begin{cases} u & \text{für } u \in \hat{f}^{d-\varepsilon} \\ \mathcal{V}(u, t) & \text{für } u \in \hat{f}_{d-\varepsilon}^{d+\varepsilon} \text{ mit } t := \frac{\tau}{2\varepsilon} [d-\varepsilon - f(u)] \in [-\tau, 0]. \end{cases}$$

$\bar{\Phi}$ besitzt alle gewünschten Eigenschaften: $\bar{\Phi}$ ist stetig und ungerade;
 außerdem gilt für beliebiges $u \in \hat{f}_{d-\varepsilon}^{d+\varepsilon}$:

$$\begin{aligned} f(\bar{\Phi}(u)) &= f(\mathcal{V}(u, t)) = f(u) + t \|\Gamma(u)\|^2 + \text{tr}(u, t) \\ &\leq d - \varepsilon - \frac{2t\varepsilon}{\tau} + t\rho^2 - t\rho^2/2 \leq d - \varepsilon - t\rho^2/2 + t\rho^2/2 \\ &= d - \varepsilon. \end{aligned}$$



Beweis zu (1.24)

Da f auf M_r nach unten beschränkt ist, gilt:

$$-\infty < b_1 = \inf_{u \in M_r} f(u) \leq b_2 \leq \dots \leq b_m \leq \inf_{A \in M_r} \sup_{u \in A} f(u)$$

$\text{Genus}(A) \geq m$

$$\leq \sup_{u \in \hat{f}^c} f(u) = c.$$

Damit liegen alle Zahlen $b_1, \dots, b_m$ im Intervall $(-\infty, c]$ und sind deshalb normale Werte des Paares (f, M_r) .



Beweis von (1.17)

Es genügt Teil c) der Behauptung zu beweisen, a) und b) ergeben sich daraus unmittelbar.

Sei also für ein $q \geq 1$ und ein $j \in \{1, \dots, m\}$ $b_j = b_{j+1} = \dots = b_{j+q-1}$ und $\text{Genus}(K_{b_j}) \leq q-1$. Nach (1.6) und (1.14) g) gibt es eine δ -Umgebung N_δ von K_{b_j} mit $\text{Genus}(\overline{N_\delta}) = \text{Genus}(K_{b_j}) \leq q-1$.

Nach (1.23) und (1.24) können wir zu N_δ eine Zahl $\varepsilon > 0$ und eine ungerade, stetige Abbildung $\tilde{\Phi}$ finden mit $\tilde{\Phi}(\hat{f}^{b_j+\varepsilon} \setminus N_\delta) \subseteq \hat{f}^{b_j-\varepsilon}$.

Nun ist aber $\text{Genus}(\hat{f}^{b_j+\varepsilon}) \geq j+q-1$, denn

$$b_j + \varepsilon > b_{j+q-1} = \inf \{ t \in TR \mid \text{Genus}(\hat{f}^t) \geq j+q-1 \}.$$

Daher gilt nach Lemma (1.14) a), b), f) :

$$\begin{aligned} \text{Genus}(\hat{f}^{b_j-\varepsilon}) &\geq \text{Genus}(\tilde{\Phi}(\hat{f}^{b_j+\varepsilon} \setminus N_\delta)) \geq \text{Genus}(\hat{f}^{b_j+\varepsilon} \setminus N_\delta) \\ &\geq \text{Genus}(\hat{f}^{b_j+\varepsilon}) - \text{Genus}(\overline{N_\delta}) \geq j+q-1 - (q-1) = j \end{aligned}$$

Folglich hat man nach Definition der b_j :

$$b_j = \inf_{A \subseteq M_r} \sup_{u \in A} f(u) \leq \sup_{u \in \hat{f}^{b_j-\varepsilon}} f(u) = b_j - \varepsilon. \quad \text{⚡}$$

$\text{Genus}(A) \geq j$



§ 2 Rayleigh-Ritz-Galerkin Verfahren zur Berechnung kritischer Werte

In diesem Kapitel untersuchen wir weiter die Existenz kritischer Werte von f auf M_r , jedoch unter einem anderen Gesichtspunkt: Es stellt sich nämlich die Frage, ob sich die kritischen Werte aus Satz (1.17), und damit auch die Lösungen des Eigenwertproblems (1.1), tatsächlich berechnen lassen. Dies ist immer dann der Fall, wenn es gegen sie konvergente Näherungsverfahren gibt. Der Variationscharakter des Problems legt es nahe, Rayleigh-Ritz-Galerkin Verfahren zu untersuchen. Im folgenden geben wir daher Bedingungen an f und g an, so daß solche konvergente Verfahren existieren. Unser Augenmerk gilt wieder den Fällen, in denen die Palais-Smale Bedingung (C) nicht global erfüllt, bzw. die Äquipotentialfläche M_r , auf welcher man die kritischen Punkte von f sucht, nicht beschränkt ist.

Dazu führen wir das Konzept der streng normalen Werte des Paares (f, M_r) ein, welche eine Teilmenge der normalen Werte von (f, M_r) bilden. Es wird bewiesen, daß nun das Kompakt-Genus γ der Menge $\hat{f}^c$ den Ausschlag darüber gibt, wieviele kritische Werte $\hat{f}$ in $(-\infty, c]$ besitzt, die man außerdem im oben beschriebenen Sinne näherungsweise berechnen kann.

(2.1) DEFINITION

Es sei $\hat{f}: M_r \rightarrow \mathbb{R}$ ein reellwertiges C^1 -Funktional in einem B.-R. X .

a) Eine Zahl $d \in \mathbb{R}$ nennen wir streng normalen Wert von $\hat{f}$: $\Leftrightarrow$

wenn jede Folge $\{u_n\}$ in M_r mit $\hat{f}(u_n) \rightarrow d$ und $d_{u_n} \hat{f} \rightarrow 0$ eine konvergente Teilfolge enthält.

b) Wir nennen $d \in \mathbb{R}$ streng normalen Wert des Paares (f, M_r) : $\Leftrightarrow$

(i) d ist streng normaler Wert von $\hat{f}$ und

(ii) es existiert eine δ -Umgebung von $\hat{f}^{-1}(J)$, auf welcher die Abbildung s beschränkt ist.

(2.2) Bemerkung

Da $d_{u_n} \hat{f} \in T_{u_n}(M_r)^*$ eine Folge mit Elementen in verschiedenen Räumen ist, muß man erklären, was $d_{u_n} \hat{f} \rightarrow 0$ bedeuten soll:

$$(2.3) \quad d_{u_n} \hat{f} \rightarrow 0 : \Leftrightarrow (d_{u_n} f) t_{u_n} \xrightarrow{X^*} 0$$

wobei $t_u: X \rightarrow X_u = T_u(M_r)$ die durch $t_u(v) := v - \frac{(G(u), v)}{(G(u), u)} \cdot u$

definierte Projektion von v auf den Tangentialraum an M_r im Punkte u bezeichnet.

Unmittelbar klar ist das folgende

(2.4) LEMMA

Jeder streng normale Wert des Paares (f, M_r) ist auch normaler Wert des Paares (f, M_r) .

Analog zu Lemma (1.11), (1.12) beweist man:

(2.5) LEMMA

Die Menge der streng normalen Werte des Paares (f, M_r) ist gleich der Menge der streng normalen Werte von $\hat{f}$, falls eine der folgenden

beiden Bedingungen erfüllt ist:

a) M_r ist beschränkt in X

b) Für beschränkte Folgen $\{u_n\} \in X$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} g(u_n) = r \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s(u_n) = 1$
und es ist $\hat{f}^{-1}(J)$ beschränkt in X für beschränkte Teilmengen J von TR .

(2.6) DEFINITION

Sei $A \in \Sigma$ abgeschlossene, symmetrische Teilmenge von $X \setminus \{\emptyset\}$.

Mit $\gamma(A)$ bezeichnen wir die größte natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$, für die noch eine kompakte Teilmenge $K \in \Sigma$ von A existiert mit $\text{Genus}(K) = m$;
also : $\gamma(A) := \sup \{ \text{Genus}(K) \mid K \in \Sigma \text{ kompakt und } K \subseteq A \}$.

(2.7) LEMMA

a) Für beliebiges $A \in \Sigma$ gilt $\gamma(A) \leq \text{Genus}(A)$.

b) Ist $A \in \Sigma$ kompakt, so gilt $\gamma(A) = \text{Genus}(A)$.

c)
$$\hat{b}_j := \inf_{\substack{A \in M_r \\ \gamma(A) \geq j}} \sup_{u \in A} f(u) \geq \inf_{\substack{A \in M_r \\ \text{Genus}(A) \geq j}} \sup_{u \in A} f(u) =: b_j.$$

Beweis: klar. ▲

(2.8) LEMMA

Bis auf Eigenschaft (i) gelten alle in Lemma (1.14) für das Genus einer Menge gemachten Aussagen analog für γ .

Beweis

a) Ist $\gamma(A) = m$, so gibt es eine kompakte Menge $K \in \Sigma$ mit $K \subseteq A$ und $\text{Genus}(K) = \gamma(A)$. Folglich ist $\gamma(B) \geq \text{Genus}(\psi(K)) \geq \text{Genus}(K) = \gamma(A)$,
denn $\psi(K)$ ist kompakte Teilmenge von B .

b)-f) folgen nun unmittelbar.

g) Zu A gibt es eine δ -Umgebung N_δ mit $\text{Genus}(\overline{N_\delta}) = \text{Genus}(A)$.

Daher folgt aus $\text{Genus}(A) = \mathcal{J}(A) \leq \mathcal{J}(\overline{N_g}) \leq \text{Genus}(N_g) = \text{Genus}(A)$
 sofort $\mathcal{J}(A) = \mathcal{J}(\overline{N_g})$.

h), k) und l) sind trivial für $\mathcal{J}$ erfüllt. ▲

(2.9) SATZ

Für die Funktionale f und g seien die Voraussetzungen (A), (B) erfüllt.

Für ein $c \in \mathbb{R}$ bestehe das Intervall $(-\infty, c]$ aus streng normalen Werten
 des Paares (f, M_r) und es sei $\mathcal{J}(\hat{f}^c) \geq m$ für ein $m \in \mathbb{N}$.

Für beschränkte Intervalle J in $(-\infty, c]$ sei die Menge $\hat{f}^{-1}(J)$ beschränkt
 in X . Es sei $\{X_N\}_{N=1}^\infty$ eine aufsteigende Folge N -dimensionaler Unterräume von X
 mit in X dichter Vereinigung. $P_N: X_N \rightarrow X$ bezeichne die Einbettungs-
 abbildung von X_N nach X .

Beh.:

Neben den Behauptungen von Satz (1.17) gilt zusätzlich :

- Die Zahlen $\hat{b}_j$ sind (möglicherweise von b_j verschiedene) kritische
 Werte von f auf M_r für $j \in \{1, \dots, m\}$ und aus $\hat{b}_j = \hat{b}_{j+1} = \dots = \hat{b}_{j+q-1}$
 folgt $\mathcal{J}(K_{\hat{b}_j}) \geq q$.
- Die Zahlen

$$\hat{b}_{j,N} := \inf_{A \subseteq M_r \cap X_N} \sup_{u \in A} f(u)$$

$$\text{Genus}(A) \geq j$$

sind wohldefiniert für $j, N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq j$.

Es existieren Punkte $\{u_{j,N}\}_{N=j}^\infty$ in $M_r \cap X_N$ mit $f(u_{j,N}) = \hat{b}_{j,N}$ und

$$P_N^* F(P_N(u_{j,N})) = \bigwedge_{j,N} P_N^* G(P_N(u_{j,N}))$$

- Es gilt $\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{b}_{j,N} = \hat{b}_j$ für $j \in \{1, \dots, m\}$ und jede Folge $\{u_{j,N}\}_{N=j}^\infty$
 aus b) enthält eine gegen eine Lösung von $F(u) = \lambda \cdot G(u)$ konvergente
 Teilfolge.

Beweis

Teil a) der Behauptung erhält man aus Satz (1.17), indem man dort überall die Größe "Genus" durch " δ " ersetzt.

b) erhält man durch Anwendung von Satz (1.17) auf die Funktionale

$f_N := f \circ P_N: X_N \rightarrow \mathbb{R}$ und $g_N := g \circ P_N: X_N \rightarrow \mathbb{R}$. Es besteht ganz $\mathbb{R}$ aus normalen Werten des Paares $(f_N, M_r(g_N))$, denn $M_r(g_N) = M_r(g) \cap X_N$ ist eine kompakte Teilmenge von X_N . ($M_r(g_N)$ ist das Bild der Einheits-sphäre in X_N unter der stetigen Abbildung $s(u)u$.)

Bleibt also nur c) zu zeigen: Sei $j \in \{1, \dots, m\}$ fest gewählt.

Analog zu Hilfssatz (1.24) zeigt man, daß $\hat{b}_j$ streng normaler Wert des Paares (f, M_r) ist. Zu jedem $d \in [\hat{b}_1, \hat{b}_j]$ existieren daher nach Hilfssatz (1.20) Zahlen $\varepsilon(d), \delta(d) > 0$, für die die Abbildung s gleichmäßig stetig ist auf $U_{\delta(d)}(\hat{f}_{d-\varepsilon(d)}^{d+\varepsilon(d)})$. Die Intervalle $(d-\varepsilon(d), d+\varepsilon(d))$ bilden eine Überdeckung des kompakten Intervalls $[\hat{b}_1, \hat{b}_j]$, folglich kann man nach Übergang zu einer endlichen Teilüberdeckung Zahlen $\varepsilon_1, \delta > 0$ finden, so daß s sogar gleichmäßig stetig ist auf $U := U_{\delta}(\hat{f}_{-\infty}^{\hat{b}_j + \varepsilon_1})$. Damit ist aber auch $f(s(u)u)$ gleichmäßig stetig auf der beschränkten Menge U , d.h.:

(2.10) zu beliebigem $\varepsilon > 0$ (o.E. $\varepsilon < \varepsilon_1$) existiert ein $\delta_\varepsilon > 0$, so daß für beliebige $u, v \in U$ mit $\|u-v\| \leq \delta_\varepsilon$ gilt: $|f(s(u)u) - f(s(v)v)| = \varepsilon/2$.

Nach Definition der $\hat{b}_j$ existiert eine Menge $A \subseteq M_r$ mit $\gamma(A) \geq j$ und

$$\sup_{u \in A} f(u) \leq \hat{b}_j + \varepsilon/2.$$

Zu A existiert nach Definition von γ eine kompakte Menge $K \subseteq A$ mit:

(2.11) $\text{Genus}(K) \geq j$ und natürlich $\sup_{u \in K} f(u) \leq \sup_{u \in A} f(u) \leq \hat{b}_j + \varepsilon/2$.

Da X gleichmäßig konvexer Banachraum ist und alle Unterräume X_N abgeschlossen und konvex sind, existiert zu jedem $a \in X$ genau ein $a_N \in X_N$ mit

$$\|a - a_N\| = \inf_{y \in X_N} \|a - y\|$$

d.h.: die Abbildungen $\pi_N: X \rightarrow X_N$ sind durch die Vorschrift $\pi_N(a) := a_N$ wohldefiniert. Man überlegt sich leicht, daß jedes π_N eine stetige, ungerade Projektion auf X_N ist, die für $N \rightarrow \infty$ stark gegen die Identität auf X konvergieren. Folglich konvergiert $\{\pi_N\}$ gleichmäßig auf der kompakten Menge K gegen die Identität, so daß man ein $N_0 \in \mathbb{N}$ finden kann mit

$$(2.12) \quad \|u - \pi_N(u)\| \leq \min\{\delta, \delta_n\} \quad \text{für alle } u \in K \text{ und } N \geq N_0.$$

Die Menge $K_N := \{s(\pi_N u) \pi_N u \mid u \in K\}$ ist kompakte Teilmenge von X_N mit $\text{Genus}(K_N) \geq j$ für $N \geq N_0$, denn die Abbildung $s(u)u$ ist stetig und ungerade auf K und bildet X_N in sich ab. Damit gilt für beliebiges $v = s(\pi_N u) \pi_N u \in K_N$:

$$f(v) = f(s(\pi_N u) \pi_N u) = f(u) + f(s(\pi_N u) \pi_N u) - f(s(u)u)$$

$$\stackrel{(2.11)}{\leq} \hat{b}_j + \varepsilon/2 + |f(s(\pi_N u) \pi_N u) - f(s(u)u)|$$

$$\stackrel{(2.10)(2.12)}{\leq} \hat{b}_j + \varepsilon/2 + \varepsilon/2.$$

Also gilt für alle $N \geq N_0$:

$$\hat{b}_{j,N} = \inf_{\substack{A \subseteq M_r \cap X_N \\ \mathcal{T}(A) \geq j}} \sup_{u \in A} f(u) \leq \sup_{u \in K_N} f(u) \leq \hat{b}_j + \varepsilon.$$

Zusammen mit der trivialen Ungleichung $\hat{b}_j \leq \hat{b}_{j,N}$ ergibt sich, da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, der erste Teil der Behauptung von c).

Ist $\{u_{j,N}\}_{N \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $f(u_{j,N}) = \hat{b}_{j,N}$, $u_{j,N} \in X_N$ und

$$P_N^* F(P_N(u_{j,N})) = \bigwedge_{j,N} P_N^* G(P_N(u_{j,N})) ,$$

so muß sie beschränkt sein in X wegen $f(u_{j,N}) \rightarrow \hat{b}_j$.

Bleibt $d_{u_{j,N}} \hat{f} \rightarrow 0$ zu zeigen: Wegen

$$\begin{aligned} \|(d_{u_{j,N}} \hat{f})_{t_{u_{j,N}}}\|_{X^*} &= \sup_{\substack{v \in X \\ \|v\|=1}} \left| d_{u_{j,N}} \hat{f}(t_{u_{j,N}}(v)) \right| \\ &= \sup_{\substack{v \in X \\ \|v\|=1}} \left| (F(u_{j,N}), v) - \frac{(G(u_{j,N}), v)}{(G(u_{j,N}), u_{j,N})} (u_{j,N}, v) \right| \\ &= \left\| F(u_{j,N}) - \frac{(F(u_{j,N}), u_{j,N})}{(G(u_{j,N}), u_{j,N})} G(u_{j,N}) \right\|_{X^*} \end{aligned}$$

ist die Folge $d_{u_{j,N}} \hat{f}(t_{u_{j,N}})$ beschränkt in X^* .

Außerdem gilt für $v \in X_n$ und $N \geq n$:

$$\begin{aligned} d_{u_{j,N}} \hat{f}(t_{u_{j,N}}(v)) &= (F(u_{j,N}) - \frac{(F(u_{j,N}), u_{j,N})}{(G(u_{j,N}), u_{j,N})} G(u_{j,N}), v) \\ &= (P_N^* F(P_N(u_{j,N})) - \bigwedge_{j,N} P_N^* G(P_N(u_{j,N})), v) = 0. \end{aligned}$$

Da die Vereinigung der X_N dicht in X liegt, folgt hieraus

$$d_{u_{j,N}} \hat{f}(t_{u_{j,N}}) \xrightarrow{X^*} 0 \quad \text{d.h.:} \quad d_{u_{j,N}} \hat{f} \rightarrow 0 \quad \text{mit} \quad N \rightarrow \infty.$$

Da $\hat{b}_j$ streng normaler Wert des Paares (f, M_r) ist, enthält $\{u_{j,N}\}$ eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert natürlich Lösung des Eigenwertproblems ist.



§ 3

Normale und streng normale Werte

Wir haben bisher die Frage nach der Existenz von Lösungen des Eigenwertproblems $f'(u) = \lambda g'(u)$ darauf zurückgeführt, die normalen Werte des Funktional f auf der Mannigfaltigkeit $M_r(g)$ zu bestimmen. Mit Satz (2.9) ist es außerdem gelungen, die Konvergenz von Rayleigh-Ritz-Galerkin Verfahren gegen kritische Werte auf die Bestimmung streng normaler Werte des Paares (f, M_r) zurückzuführen. Hat man also einmal die Menge der (streng) normalen Werte von f bzgl. M_r bestimmt, so kann man aus den Sätzen (1.17) und (2.9) unmittelbar auf die Anzahl von Lösungen bzw. die Konvergenz von Näherungsverfahren gegen solche Lösungen schließen.

Aus diesem Grunde wollen wir in dem nun folgenden Abschnitt für bestimmte Situationen die normalen bzw. streng normalen Werte bestimmen. Insbesondere können wir so bekannte Sätze über kritische Werte von f auf beschränkten Mannigfaltigkeiten als Spezialfälle von (1.17) bzw. (2.9) herleiten.

Zur Übersicht über die im folgenden benötigten (S)-Bedingungen notieren wir deren Zusammenhang kurz im nächsten Lemma (3.2) :

(3.1) DEFINITION (s.: [11],[16],[50])

Sei $A: X \rightarrow X^*$ ein Operator auf einem reflexiven Banachraum X .

A genügt der Bedingung $(S_+), (S), (S_0), (S_1)$ genau dann, wenn für

$n \rightarrow \infty$ stets gilt :

$$(S_+) \quad u_n \rightharpoonup u, \overline{\lim} (A(u_n) - A(u), u_n - u) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad u_n \longrightarrow u$$

$$(S) \quad u_n \rightharpoonup u, \lim (A(u_n) - A(u), u_n - u) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_n \longrightarrow u$$

$$(S_0) \quad u_n \rightharpoonup u, A(u_n) \rightharpoonup v, \lim (A(u_n), u_n) = (v, u) \Rightarrow u_n \rightharpoonup u$$

$$(S_1) \quad u_n \rightharpoonup u, A(u_n) \rightarrow v \quad \Rightarrow \quad u_n \longrightarrow u$$

(3.2) LEMMA (s.: [50])

$$(S_+) \Rightarrow (S) \Rightarrow (S_0) \Rightarrow (S_1).$$

Beweis: klar ▲

(3.3) SATZ

f, g erfüllen die Voraussetzungen (A), (B).

G ist stark folgenstetig (d.h.: $u_n \rightharpoonup u \Rightarrow G(u_n) \rightarrow G(u)$).

$\hat{f}^{-1}(J)$ ist für beschränkte Teilmengen J von TR beschränkt in X und

es gilt für beschränkte Folgen $u_n \in X$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(u_n) = r \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s(u_n) = 1 \quad .$$

Beh.:

a) Erfüllt F die Bedingung (S_1) , so besteht ganz TR aus normalen Werten des Paares (f, M_r) .

b) Erfüllt F die Bedingung (S_0) , so besteht ganz TR aus streng normalen Werten des Paares (f, M_r) .

(3.4) Bemerkung

Wie man sich an einfachen Beispielen (vgl. (3.13)) klarmacht, ist unter obigen Voraussetzungen M_r im allgemeinen unbeschränkt.

Beweis zu (3.3)

Nach Lemma (1.12) und (2.5) genügt es zu zeigen, daß TR aus (streng) normalen Werten von $\hat{f}$ besteht. Sei also $u_n \in M_r$ eine Folge aus M_r mit $f(u_n) \rightarrow d \in TR$ und $\|d_{u_n} \hat{f}\| \rightarrow 0$ ($d_{u_n} \hat{f} \rightarrow 0$). Die Folge u_n ist beschränkt, man kann also ohne Einschränkung annehmen, daß für eine Teilfolge gilt:

$$\lambda_n := \frac{(F(u_n), u_n)}{(G(u_n), u_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda, \quad u_n \rightharpoonup u \quad \text{und} \quad G(u_n) \rightarrow G(u).$$

a) Aus Lemma (1.5) und der Ungleichung

$$\|F(u_n) - \lambda G(u)\|_{X^*} \leq \|F(u_n) - \lambda_n G(u_n)\|_{X^*} + \|G(u_n)\|_{X^*} |\lambda_n - \lambda| + \|G(u_n) - G(u)\|_{X^*} |\lambda|$$

folgt unmittelbar die Behauptung aus Voraussetzung (S_1) an F .

b) Mit $w := \lambda G(u)$ hat man:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (F(u_n), u_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(F(u_n), u_n)}{(G(u_n), u_n)} (G(u_n), u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n (G(u_n), u_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda (G(u_n), u_n) = \lambda (G(u), u) = (w, u) \end{aligned}$$

Andererseits hat man für beliebiges $v \in X$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (F(u_n) - w, v) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (F(u_n) - \lambda_n G(u_n), v) + \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n G(u_n) - \lambda G(u), v) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (F(u_n), v) - \frac{(G(u_n), v)}{(G(u_n), u_n)} \cdot u_n + 0 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (F(u_n), t_{u_n}(v)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_{u_n} \hat{f}(t_{u_n}(v)) = 0 \end{aligned}$$

also gilt $F(u_n) \rightharpoonup w$. Die Behauptung folgt nun aus Bedingung (S_0) für F .

Im engen Zusammenhang mit Satz (3.3) sollte man auch das folgende Ergebnis von Clement [18] sehen :

(3.5) SATZ (Clement)

Es sei $f: D(f) \subseteq H \rightarrow \mathbb{R}$ ein nichtnegatives, gerades, konvexes Funktional auf einem reellen, separablen Hilbertraum H mit $f(0) = 0$ und einem in H dichten Definitionsbereich $D(f) := \{x \in H \mid f(x) < +\infty\}$. Für alle $\lambda > 0$ sei $\{x \in H \mid f(x) \leq \lambda\}$ kompakt in H .

Beh.:

Zu jedem $r > 0$ existiert eine Folge von Paaren $(u_n, \mu_n) \in H \times \mathbb{R}_+$ mit den Eigenschaften :

$$\|u_n\|_H = r, \quad \mu_n u_n \in \partial f(u_n) \quad \text{und} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} f(u_n) = +\infty.$$

In seinem Beweis zeigt Clement, daß jedes Intervall $(-\infty, K]$ für hinreichend kleine $\lambda > 0$ aus normalen Werten des Paares (f_λ, S_r) besteht; ($S_r := S_r(H)$ bezeichne im folgenden die Sphäre vom Radius r um Null in H) anschließender Grenzübergang $\lambda \searrow 0$ liefert sein Ergebnis. Hier bezeichnet $f_\lambda(x) := \frac{\lambda}{2} \|A_\lambda(x)\|^2 + f(J_\lambda(x))$ das zur Yosida-Approximation $A_\lambda := \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)$, $J := (I + \lambda A)^{-1}$ an $A := \partial f$ gehörende konvexe und frechetdifferenzierbare Potential.

Wir wollen hier auf einem anderen Wege, ohne die Benutzung der Yosida-Approximation, ein ähnliches Resultat beweisen. Dazu nutzen wir aus, daß man den Definitionsbereich eines konvexen Funktionals stets zu einem normierten Raum machen kann, auf dem das Funktional stetig ist. Fordert man nun noch zusätzlich die Vollständigkeit dieses Raumes und Frechetdifferenzierbarkeit des Funktionals in diesem Raum, so läßt sich Satz (3.3) unmittelbar auf dieses Funktional anwenden.

(3.6) DEFINITION (vgl.: [2],[31])

Für $f:D(f) \subseteq H \rightarrow \mathbb{R}$ wie in Satz (3.5) und $u \in D(f) \setminus \{0\}$ definiere :

$$N_u := \left\{ t > 0 \mid \|u/t\|_H + f(u/t) \geq 1 \right\} \quad \text{ sowie }$$

$$\|u\|_f := \begin{cases} \sup N_u & \text{für } u \neq 0 \\ 0 & \text{für } u = 0 \end{cases}$$

Bezeichne mit X_f den Raum $X_f := (D(f), \|\cdot\|_f)$.

(3.7) LEMMA

- a) $\|\cdot\|_f$ definiert auf $D(f)$ eine Norm.
- b) Es gilt $\|u\|_H \leq \|u\|_f$ für beliebiges $u \in X_f$.
- c) Für jede Teilmenge M von X_f gilt:
 $f(M)$ ist beschränkt in $\mathbb{R} \Rightarrow M$ ist beschränkt in X_f .

Beweis:

a) ist klar, b) folgt unmittelbar aus $\left\| \frac{u}{\|u\|_H} \right\|_H + f\left(\frac{u}{\|u\|_H}\right) \geq 1$,

denn dies impliziert $\|u\|_H \in N_u$ und damit $\|u\|_H \in \sup N_u = \|u\|_f$.

c) N_u hat die Form $N_u = (0, \|u\|_f]$, denn ist $t \in N_u$ und $0 < s < t$, so

gilt: $1 \leq f(u/t) + \|u/t\|_H \leq (s/t) \{f(u/s) + \|u/s\|_H\} \leq f(u/s) + \|u/s\|_H$,

also liegt auch s in N_u .

Ist nun $f(M)$ beschränkt, etwa $f(u) \leq k$ für $u \in M$, so ist M relativ kompakt in H : $\|u\|_H \leq K$ für $u \in M$. Folglich gilt für $u \in M$ und beliebiges

$t > L := \max \{1, 2k, 2K\}$:

$\|u/t\|_H + f(u/t) \leq K/t + f(u)/t < 1$ d.h.: $t \notin N_u$ bzw.: $\|u\|_f \leq t$.

Da $t > L$ und $u \in M$ beliebig waren, gilt $\|u\|_f \leq L$ für alle $u \in M$.



In dem nun folgenden Satz (3.8) nehmen wir zusätzlich zu den Voraussetzungen von Clement an, daß f auf X_f bestimmte Differenzierbarkeitseigenschaften besitzt, erhalten dafür jedoch die schärferen Aussagen des Satzes (2.9) über die kritischen Werte von f auf S_r .

(3.8) SATZ

Es sei $f: D(f) \subseteq H \rightarrow \mathbb{R}$ ein nichtnegatives, gerades, konvexes Funktional auf einem reellen, separablen Hilbertraum H mit $f(0)=0$ und einem in H dichten Definitionsbereich $D(f)$. Für alle $\lambda > 0$ sei $\{x \in H \mid f(x) \leq \lambda\}$ kompakt in H . f erfülle auf X_f die Voraussetzung (A) und sein Gradient F genüge der Bedingung (S_0) . Es sei $r > 0$ fest gewählt.

- Beh.:
- a) Ganz $\mathbb{R}$ besteht aus streng normalen Werten des Paares (f, S_r)
 - b) Mit $g(u) := \frac{1}{2} \|u\|_H^2$ gelten alle Aussagen von Satz (2.9) für f mit $m=c=\infty$.
 - c) Für $j \rightarrow +\infty$ gilt $b_j \rightarrow +\infty$.

(3.9) BEMERKUNGEN

- a) Mit den Voraussetzungen obigen Satzes ist die Forderung
 " $\{u \in H \mid f(u) \leq \lambda\}$ ist kompakt für jedes $\lambda > 0$ " dann und nur dann
 erfüllt, wenn X_f kompakt in H eingebettet ist. Insbesondere
 ist $M_r(g)$ stets unbeschränkt in X_f .
- b) Bedingung (S_0) für F ist beispielsweise dann erfüllt, wenn der
 (ohnehin monotone) Operator F gleichmäßig monoton ist, d.h.:
 wenn eine stetige, monotone Funktion $\alpha: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ existiert,
 für die gilt $\alpha(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ und $(F(u) - F(v), u - v) \geq \alpha(\|u - v\|_f)$ für
 beliebige $u, v \in X_f$.
- c) Ist F gleichmäßig monoton und besitzt $\alpha(t)$ die Eigenschaft
 $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t)/t = +\infty$, so sind alle kritischen Punkte von f auf $M_r(g)$,
 d.h.: Lösungen von $F(u) = \lambda G(u)$, auch Lösungen von $\partial f(u) = \lambda u$,
 wobei ∂f den Subgradienten von f auf H bezeichnet.
- d) Alle bisher gemachten Aussagen bleiben auch dann richtig, wenn man
 anstelle der gleichmäßigen Konvexität von $(X_f, \|\cdot\|_f)$ lediglich ver-
 langt, daß auf X_f eine zu $\|\cdot\|_f$ äquivalente Norm existiert, bezüg-
 lich derer X_f ein gleichmäßig konvexer Banachraum ist.

Beweis zu (3.8)

- a) Wir wenden Satz (3.3) b) an: $g(u) := \frac{1}{2} \|u\|_H^2$ besitzt auf $X := X_f$
 alle unter (A), (B) geforderten Eigenschaften: es ist für $u, v \in X_f$:
- (3.10) $(G(u), v) = \langle u, v \rangle_H$ und deshalb $\|G(u) - G(v)\|_{X^*} \leq \|u - v\|_H \leq \|u - v\|_X$
 G ist außerdem stark folgenstetig als lineare, kompakte Abbildung im

reflexiven Banachraum; die Kompaktheit von G folgt aus Bemerkung (3.9) c) und (3.10). Wegen (3.7) c) und $s(u)^2 = r/g(u)$ sind alle Voraussetzungen von Satz (3.3) b) verifiziert und ganz $\mathbb{R}$ besteht aus streng normalen Werten des Paares (f, S_r) , da $S_r = M_{\tilde{r}}(g)$ ist mit $\tilde{r} := r^2/2$.

b) Da $\text{Genus}(S_r) = \text{Genus}(M_{\tilde{r}}) = +\infty$, kann man Satz (2.9) mit $m=c=+\infty$ anwenden. Für den Beweis von c) benötigen wir den folgenden Hilfssatz, in dem wir $\text{Genus}_X(A)$ anstelle von $\text{Genus}(A)$ schreiben um anzudeuten, bzgl. welchen Raumes bzw. welcher Topologie das Genus von A berechnet wurde.

(3.11) HILFSSATZ

Es seien X, Y zwei Banachräume und $\text{id}_X: X \rightarrow Y$ eine stetige Einbettung von X in Y . Ist A abgeschlossene, symmetrische Teilmenge von $Y \setminus \{0\}$, so gilt für $A_X := A \cap X : A_X$ ist abgeschlossene symmetrische Teilmenge von $X \setminus \{0\}$ und

$$\text{Genus}_X(A_X) \leq \text{Genus}_Y(A).$$

Beweis:

Die Symmetrie und Abgeschlossenheit von A_X in X ist klar. Sei also $\text{Genus}_Y(A) = m \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine stetige, ungerade Abbildung $\varphi: A \cap Y \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Definiere $\psi: A_X \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch $\psi := \varphi \circ \text{id}_X|_{A_X}$. ψ ist ungerade, stetig auf X und besitzt auf A_X keine Nullstelle, folglich gilt $\text{Genus}_X(A_X) \leq m = \text{Genus}_Y(A)$.



Beweis von (3.8) c)

$A := A^c := \{u \in H \mid f(u) \leq c \wedge g(u) = r\}$ ist zusammen mit f^c kompakte, symmetrische Teilmenge von H und A enthält nicht die Null. Folglich gilt $\text{Genus}_H(A^c) \leq j(c)$ für ein $j(c) \in \mathbb{N}$. Wäre $b_j \leq c$ für irgendein $c \in \mathbb{R}$ und alle $j \in \mathbb{N}$, so gibt es nach Definition von $b_{j(c)+1}$ eine Menge $B \subseteq M_r$ mit $\text{Genus}_{X_f}(B) \geq j(c)+1$ und $\sup_{u \in B} f(u) \leq c$. Also liegt B ganz in $A_X := A^c \cap X_f$ und man erhält:

$$j(c)+1 \leq \text{Genus}_{X_f}(B) \leq \text{Genus}_{X_f}(A_X) \stackrel{(3.11)}{\leq} \text{Genus}_H(A^C) \leq j(c) \quad \swarrow$$

also gilt $b_j \rightarrow +\infty$ für $j \rightarrow +\infty$.

Beweis zu den Bemerkungen (3.9):

a) Notwendigkeit: Ist $M \subseteq X_f$ beschränkt, so existiert ein $k \in \mathbb{R}$ mit $f(u) \leq k$ für alle $u \in M$, denn f bildet beschränkte Mengen von X_f in beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ ab, eine Konsequenz der vorausgesetzten gleichmäßigen Stetigkeit von F auf beschränkten Teilmengen von X_f . Folglich ist $M \subseteq \{u \in H \mid f(u) \leq k\}$ und damit relativ kompakt in H .

Die umgekehrte Richtung der Behauptung ergibt sich unmittelbar aus Lemma (3.7) c).

Wäre M_f beschränkt in X_f , also $\|s(u)\|_f \leq K$ für beliebiges $u \in X_f \setminus \{0\}$, so ergibt sich daraus wegen $s(u) = \sqrt{2r} / \|u\|_H$ und $\|u\|_H \leq \|u\|_f$ die Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|_H$ und $\|\cdot\|_f$ auf X_f . Da X_f dichte Teilmenge von H ist, folgt daraus schon $X_f = H$. Da andererseits X_f kompakt in H eingebettet ist, muß X_f bzw. H endlichdimensional sein, ein Widerspruch zur Voraussetzung (A).

b) Gilt $u_n \rightarrow u$, $F(u_n) \rightarrow w$ und $(F(u_n), u_n) \rightarrow (w, u)$, so hat man:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (F(u_n) - F(u), u_n - u) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (F(u_n), u_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} (F(u_n), u) - \lim_n (F(u), u_n - u) \\ &= 0 \end{aligned}$$

also $\|u_n - u\|_f \rightarrow 0$.

c) Es gilt $X_f \subseteq H \subseteq X_f^*$ im folgenden Sinne: Jedes $u \in H$ definiert durch $\langle u, \cdot \rangle : X_f \rightarrow \mathbb{R}$ ein stetiges, lineares Funktional auf X_f , d.h.: $u \in X_f^*$ und es gilt mit dieser Identifikation: $(u, v) = \langle u, v \rangle$ für $u \in H$ und $v \in X_f$. Der Operator $F_H : D(F_H) \rightarrow H$, der definiert ist durch $D(F_H) := \{u \in X_f \mid F(u) \in H\}$, $F_H(u) := F(u)$ für $u \in D(F_H)$, ist nach Beispiel (2.3.7) in [2] maximal monoton in H . Andererseits

ist auch der Subgradient ∂f von f in H maximal monoton, denn die Kompaktheit von $\{u \in H \mid f(u) \leq \lambda\}$ impliziert die Unterhalbstetigkeit von f , woraus nach einem bekannten Satz von Rockafellar [43] die maximale Monotonie von ∂f folgt. Wegen der offensichtlichen Inklusion $F_H \subseteq \partial f$ gilt daher schon $F_H = \partial f$.

Ist nun $u \in X_f$ kritischer Punkt von f auf S_r , so gilt für beliebiges $v \in X_f$: $\langle F(u), v \rangle = \lambda \langle G(u), v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ und damit auch für alle $v \in D(F_H)$: $\langle \lambda u - F_H(v), u - v \rangle = \langle F(u) - F(v), u - v \rangle \geq 0$. Da F_H maximal monoton und einwertig ist, impliziert dies $\partial f(u) = F_H(u) = \lambda \cdot u$.

Die Gültigkeit von d) ist offensichtlich. ▲

Im folgenden wollen wir die Menge der (streng) normalen Werte für etwas konkretere Situationen bestimmen, insbesondere auch in Fällen, in denen G nicht stark folgenstetig ist.

Dazu gehen wir aus von Eigenwertproblemen der Form

$$(3.12) \quad Lu + N(u) = \lambda u \quad u \in D(L+N) \subseteq D(L) \subseteq H$$

in einem reellen, separablen Hilbertraum $(H, \|\cdot\|)$.

L sei ein unbeschränkter, selbstadjungierter, positiv definiter Operator, d.h.: für ein $c \in \mathbb{R}_+$ und alle $u \in D(L)$ gelte $\langle Lu, u \rangle \geq c \|u\|^2$.

$\{E_\mu\}$ bezeichne die zu L gehörende Spektralschar und λ_* den kleinsten Häufungspunkt im Spektrum $\sigma(L)$ von L , d.h.:

$$\lambda_* := \inf \{ \mu \in \mathbb{R} \mid \dim(E_\mu(H)) = +\infty \}.$$

Zu L definieren wir den zugehörigen Energierraum $(H_L, \|\cdot\|_L)$ durch

$$H_L := (\overline{D(L)}, \langle u, v \rangle_L := \langle Lu, v \rangle) \text{ mit } \|u\|_L^2 := \langle u, u \rangle_L.$$

N möge ein ungerader, nichtlinearer Potentialoperator sein mit

$$\text{Potential } q, \text{ d.h.: für } u, v \in D(N) \text{ gelte } \langle N(u), v \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{ q(u+tv) - q(u) \}.$$

Außerdem nehmen wir im folgenden an, daß $f(u) := \frac{1}{2} \|u\|_L^2 + q(u)$ die Voraussetzungen (A), (B) erfüllt auf einem Banachraum $X \subseteq H_L$, der dicht in H_L liegt und stetig in H_L eingebettet ist. Dies impliziert insbesondere, daß q auf X Frechet-differenzierbar ist; den Gradienten von q in X bezeichnen wir mit Q .

Es sei wieder $g(u) := \frac{1}{2} \|u\|^2$ und $M_r := \{ u \in X \mid g(u) = r \}$.

(3.13) LEMMA

- a) $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllt die Voraussetzungen (A), (B).
- b) M_r ist unbeschränkt in X .
- c) Alle (streng) normalen Werte von $\hat{f}$ auf M_r sind auch (streng) normale Werte des Paares (f, M_r) .

Beweis:

a) klar.

b) Ist M_r beschränkt in X , so gilt $\|s(u)u\|_X \leq K$ für alle $u \in X \setminus \{0\}$.

Wegen $s(u) = \sqrt{2r} / \|u\|_H$ folgt daraus $\|u\|_X \leq \text{const} \cdot \|u\|_H$ für beliebige $u \in X$. Da X stetig in H_L eingebettet ist, impliziert dies $\|u\|_L \leq \text{const} \cdot \|u\|_H$ für alle $u \in H_L$ im Widerspruch zur geforderten Unbeschränktheit von L .

c) Setze $\delta := c \cdot \sqrt{r/2}$ mit der Konstanten $c > 0$ aus der Ungleichung $\|u\|_H \cdot c \leq \|u\|_X$. Dann gilt für beliebiges $u \in U_\delta(M_r) \subseteq X$ und $v \in M_r$ mit $\|u-v\|_X \leq$

$$\|u\|_H \geq \|v\|_H - \|u-v\|_H \geq \sqrt{2r} - \frac{1}{c} \|u-v\|_X \geq \sqrt{2r} - \sqrt{r/2} = \sqrt{r/2}$$

d.h.: $s(u) = \sqrt{2r} / \|u\|_H \leq 2$ für $u \in U_G(M_r)$.

Damit sind unabhängig von f alle (streng) normalen Werte von $\hat{f}$ auch (streng) normale Werte des Paares (f, M_r) . ▲

In unserer Betrachtungsweise haben wir es also mit unbeschränkten Mannigfaltigkeiten zu tun, jedoch bringt dies für Probleme der Form (3.12), wie Teil c) obigen Lemmas zeigt, keine zusätzlichen Schwierigkeiten bei der Anwendung von Satz (1.17) bzw. (2.9).

Es bleibt noch die Frage zu klären, welches (streng) normale Werte des Funktional f auf M_r sind. Auskunft darüber geben die folgenden drei Sätze, in denen wir annehmen, daß $X=H_L$ gilt, aber keine kompakte Invertierbarkeit von L verlangen.

(3.14) SATZ

Das Potential $q: X \rightarrow TR$ sei schwachstetig auf $X=H_L$.

Für ein $c \in TR$ sowie eine Zahl $\varepsilon > 0$ gelte:

$$(3.15) \quad \hat{f}^c \subseteq \left\{ u \in M_r \mid \frac{(F(u), u)}{2r} \leq \lambda_* - \varepsilon \right\}$$

$\hat{f}^{-1}(J)$ sei beschränkt in X für beschränkte Intervalle $J \subseteq (-\infty, c]$.

Beh.:

$(-\infty, c)$ besteht aus streng normalen Werten des Paares (f, M_r) .

Als unmittelbare Folgerung aus diesem Satz erhält man das folgende Korollar:

(3.16) KOROLLAR

Ist L kompakt invertierbar, also $\lambda_* = +\infty$, so besteht ganz TR aus streng normalen Werten des Paares (f, M_r) .

Beweis

Voraussetzung (3.15) ist dann für beliebiges $c \in TR$ automatisch erfüllt.

Für den Beweis von Satz (3.14) benötigen wir das folgende Lemma, das grob gesprochen die Eigenschaft (S_+) für Operatoren $(L-\lambda)$ mit $\lambda < \lambda_*$ nachweist:

(3.17) LEMMA

Sei $\lambda < \lambda_*$ und $u_n \in H_L$ eine Folge mit : $u_n \xrightarrow{H_L} \theta$.

Beh.:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|u_n\|_L^2 - \lambda \|u_n\|^2) \leq 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_L = 0.$$

Beweis

Für $\lambda \leq 0$ ist die Behauptung trivial. Sei also $\lambda > 0$ und $\varepsilon > 0$ eine Zahl mit $0 < \varepsilon < \text{dist}(\lambda, \sigma(L) \setminus \{\lambda_1^2\}) \leq \lambda_* - \lambda$. Dann gilt für $u \in H_L$:

$$(3.18) \quad \varepsilon \cdot \|Q_\lambda u\|^2 \leq \|u\|_L^2 - \lambda \|u\|^2 + \lambda \|E_\lambda u\|^2 \quad \text{mit } Q_\lambda := I - E_\lambda.$$

Denn über die Spektraldarstellung von L erhält man für $u \in D(L)$:

$$\begin{aligned}
 \langle Lu, u \rangle &= \int_0^\infty \mu d\langle E_\mu u, u \rangle = \int_0^{\lambda+\varepsilon} \mu d\langle E_\mu u, u \rangle + \int_{\lambda+\varepsilon}^\infty \mu d\langle E_\mu u, u \rangle \\
 &\geq (\lambda + \varepsilon) \int_{\lambda+\varepsilon}^\infty d\langle E_\mu u, u \rangle = (\lambda + \varepsilon) \cdot \|(I - E_\lambda)u\|^2 \\
 &= (\lambda + \varepsilon) \|Q_\lambda u\|^2 = \varepsilon \|Q_\lambda u\|^2 + \lambda \|u\|^2 - \lambda \|E_\lambda u\|^2.
 \end{aligned}$$

Da $D(L)$ dicht in H_L ist und die auftretenden Größen stetige Funktionen auf H_L sind, gilt obige Ungleichung auch für alle $u \in H_L$.

Nun ist aber $E_\lambda: H \rightarrow H$ ein kompakter Operator, denn $E_\lambda(H)$ ist endlichdimensional. Folglich gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \|E_\lambda u_n\| = 0$ und damit auch

$$\begin{aligned}
 0 \leq \varepsilon \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^2 &\leq \varepsilon \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|E_\lambda u_n\|^2 + \varepsilon \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|Q_\lambda u_n\|^2 \\
 &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \|u_n\|_L^2 - \lambda \|u_n\|^2 + \lambda \|E_\lambda u_n\|^2 \right\} \leq 0.
 \end{aligned}$$

Also gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = 0$ und aus

$$0 \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_L^2 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \|u_n\|_L^2 - \lambda \|u_n\|^2 \right\} \leq 0$$

folgt die Behauptung. ▲

Beweis zu (3.14)

Bezeichnen wir mit $Q := q'$ den Gradienten von q in $X = H_L$, so gilt

für $u, v \in H_L$:

$$\begin{aligned}
 (G(u), v) &= \langle u, v \rangle = \langle L^{-1}u, v \rangle_L \quad \text{und} \\
 (F(u), v) &= \langle (I+Q)(u), v \rangle_L = \langle L^{1/2}u, L^{1/2}v \rangle + \langle Q(u), v \rangle_L.
 \end{aligned}$$

Ist $u \in D(L) \subseteq D(N)$, so hat man außerdem:

$$(F(u), v) = \langle (L+N)(u), v \rangle = \langle (I+L^{-1}N)(u), v \rangle_L.$$

Sei nun $\{u_n\}$ eine Folge aus M_r mit: $f(u_n) \longrightarrow d < c$ und $d_{u_n} \hat{f} \longrightarrow \theta$.
Die Folge ist beschränkt, denn fast alle Werte von $f(u_n)$ liegen in einer Umgebung von d , die c nicht enthält. Außerdem gilt für alle $w \in X$:

$$\begin{aligned} (d_{u_n} f)(t_{u_n}(w)) &= (F(u_n), w - \frac{(G(u_n), u_n)}{(G(u_n), u_n)} \cdot u_n) \\ &= (F(u_n) - \frac{(F(u_n), u_n)}{(G(u_n), u_n)} G(u_n), w) \\ &= \langle (I+Q)(u_n) - \frac{(F(u_n), u_n)}{2r} L^{-1} u_n, w \rangle_L \longrightarrow 0 \text{ für } n \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Die Zahlenfolge $\lambda_n := (F(u_n), u_n)/(2r)$ ist beschränkt in $\mathbb{R}$, kann also nach eventuellem Übergang zu einer Teilfolge als konvergent angenommen werden: $\lambda_n \longrightarrow \lambda$. Weil fast alle u_n in $\hat{f}^c$ liegen, gilt $\lambda < \lambda_*$ nach Voraussetzung (3.15). Ebenso setzen wir o.E. die Folge $\{u_n\}$ als schwach konvergent in H_L voraus: $u_n \xrightarrow{H_L} u$.

Weil q schwachstetig auf H_L und Q gleichmäßig stetig auf beschränkten Mengen ist, folgt aus einem bekannten Satz (Satz 7.3 in [48]) die Kompaktheit von Q in H_L , d.h.: wir können annehmen, daß $Q(u_n) \xrightarrow{H_L} z$ gilt. Da für $w \in H_L$ gilt: $t_{u_n}(w) = t_{u_n}(w + u_n)$, hat man für $x_n := u_n - u$ die Beziehung:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_n\|_L^2 - \lambda \|x_n\|^2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n - \lambda L^{-1} x_n, x_n \rangle_L \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \langle x_n + Q(u_n) - \lambda L^{-1} x_n, x_n \rangle_L - \langle z, x_n \rangle_L - \right. \\ &\quad \left. - \langle Q(u_n) - z, x_n \rangle_L + (\lambda_n - \lambda) \langle L^{-1} x_n, x_n \rangle_L \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \langle u_n + Q(u_n) - \lambda L^{-1} u_n, x_n \rangle_L - \right. \\ &\quad \left. - \langle u - \lambda L^{-1} u, x_n \rangle_L + (\lambda_n - \lambda) \langle L^{-1} u, x_n \rangle_L \right\} \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (d_{u_n} f)(t_{u_n}(u_n - u)) = - \lim_{n \rightarrow \infty} (d_{u_n} f)(t_{u_n}(u)) = 0.$$

Die Behauptung ergibt sich nun unmittelbar aus Lemma (3.17). ▲

Bisher haben wir für Probleme der Form (3.12) : $Lu + N(u) = \lambda u$ stets verlangt, daß L positiv definit ist. Man erwartet natürlich, daß alle Aussagen auch für nach unten beschränkte Operatoren L gültig bleiben, denn nach Addition eines geeigneten Vielfachen der Identität auf beiden Seiten in (3.12) erhält man ein äquivalentes Problem mit positiv definitem linearen Anteil und den gleichen Lösungen wie (3.12). Deshalb definieren wir für durch $l \leq 0$ nach unten beschränkte Operatoren L ($l := \inf \{ \langle Lu, u \rangle / \langle u, u \rangle \mid u \in D(L) \setminus \{0\} \}$) den Energieraum H_L durch : $H_L := H_{\tilde{L}}$ wobei $\tilde{L} := L + (1-l)I$. Mit dieser Definition gilt dann :

(3.19) LEMMA

Die Aussage von Satz (3.14) bleibt auch dann gültig, wenn L lediglich ein durch l nach unten beschränkter, unbeschränkter, selbstadjungierter Operator ist.

Beweis:

Es sei $f(u) := \frac{1}{2} \langle Lu, u \rangle + q(u)$ mit einem durch l nach unten beschränkten Operator L . Für $c \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ gelte (3.15) für f . Definiere $\varphi := f + (1-l)g$ und $\zeta := c + (1-l)r$. Der Gradient von φ in H ist von der Form (3.12) mit dem positiv definiten Operator $\tilde{L} := L + (1-l)I$. Ferner gilt:

$$\begin{aligned} \hat{C}_\varphi^\zeta &= \{ u \in M_r \mid \varphi(u) \leq \zeta \} = \{ u \in M_r \mid f(u) \leq c \} \subseteq \left\{ u \in M_r \mid \frac{(F(u), u)}{2r} \leq \tilde{\lambda}_* - \varepsilon \right\} \\ &= \left\{ u \in M_r \mid \frac{(\varphi'(u), u)}{2r} \leq \tilde{\lambda}_* + (1-l) - \varepsilon \right\} = \left\{ u \in M_r \mid \frac{(\varphi'(u), u)}{2r} \leq \tilde{\lambda}_* - \varepsilon \right\} \end{aligned}$$

wobei $\tilde{\lambda}_* = \lambda_* + (1-l)$ den kleinsten Häufungspunkt in $\sigma(\tilde{L})$ bezeichnet. Außerdem ist $\hat{\phi}^{-1}(\tilde{J})$ für alle beschränkten Intervalle $\tilde{J} \subseteq (-\infty, \tilde{\lambda}]$ beschränkt, da für $J := \tilde{J} - (1-l)r \subseteq (-\infty, c]$ gilt: $\hat{\phi}^{-1}(\tilde{J}) = f^{-1}(J)$. Also besteht $(-\infty, \tilde{\lambda}]$ aus streng normalen Werten des Paares (ϕ, M_r) , woraus unmittelbar folgt, daß $(-\infty, c]$ aus streng normalen Werten des Paares (f, M_r) besteht. ▲

Aufgrund von Lemma (3.19) werden wir also in den nun folgenden Betrachtungen für L stets nach unten beschränkte, selbstadjungierte Operatoren zulassen.

Die nicht ganz leicht nachprüfbare Voraussetzung (3.15) werden wir in den folgenden Sätzen (3.20), (3.21) durch schärfere Forderungen an q ersetzen.

(3.20) SATZ

Das Potential q sei schwachstetig auf $X := H_L$. Für ein $r_1 > 0$ sei die Menge

$$\left\{ u \in X \mid g(u) \leq r_1 \text{ und } f(u) \leq \max \{0, \lambda_*\} \right\}$$

beschränkt in X . Außerdem gelte auf beschränkten Teilmengen von X die Beziehung:

$$\lim_{\|u\| \rightarrow 0} \frac{\langle Q(u), u \rangle_L}{\|u\|^2} = 0.$$

Beh.:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $r_0 \in (0, r_1]$, derart daß für alle $r \in (0, r_0]$ das Intervall $(-\infty, \lambda_* - \varepsilon]$ aus streng normalen Werten des Paares $(\frac{1}{r}f, M_r)$ besteht.

Beweis.:

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Ohne Einschränkung nehmen wir $0 < r_1 \leq 1$ an. Dann ist die Menge $\left\{ u \in X \mid g(u) \leq r_1 \text{ und } f(u) \leq r_1 \max \{0, \lambda_* - \varepsilon\} \right\}$ beschränkt in X , liegt also ganz in einer Kugel $B_K := \left\{ u \in X \mid \|u\|_L \leq K \right\}$ vom Radius K in X .

Folglich gibt es ein $r_0 \in (0, r_1]$, so daß für alle $u \in B_K$ und $0 < r \leq r_0$ gilt:

$$\frac{\|u\|_L^2}{2} = r \Rightarrow \langle Q(u), u \rangle_L \leq \frac{\varepsilon}{4} \|u\|_L^2.$$

Damit hat man für $u \in B_K \cap M_r$ mit $r \in (0, r_0]$ die Beziehung :

$$\begin{aligned} \langle Q(u), u \rangle_L - 2q(u) &\leq \langle Q(u), u \rangle_L + 2 \int_0^1 \langle Q(tu), tu \rangle_L \frac{1}{t} dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} \|u\|_L^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|u\|_L^2 \cdot \int_0^1 t dt = \varepsilon \cdot r. \end{aligned}$$

Folglich gilt für $u \in \hat{f}^{-1}(\lambda_* - \varepsilon) = \{u \in M_r \mid f(u) \leq r(\lambda_* - \varepsilon)\} \subseteq B_K \cap M_r$:

$$\begin{aligned} \frac{(F(u), u)}{2r} &= \frac{1}{2r} \left\{ \|u\|_L^2 + \langle Q(u), u \rangle_L \right\} = \frac{1}{2r} \left\{ 2f(u) + \langle Q(u), u \rangle_L - 2q(u) \right\} \\ &\leq \lambda_* - \varepsilon + \frac{1}{2r} \cdot \varepsilon \cdot r = \lambda_* - \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

d.h.: für $c := r(\lambda_* - \varepsilon)$ haben wir (3.15) nachgewiesen.

Damit besteht nach Satz (3.14) das Intervall $(-\infty, c)$ aus streng normalen Werten des Paares (f, M_r) für $0 < r \leq r_0$. Insbesondere ist damit bewiesen, daß $(-\infty, \lambda_* - \varepsilon)$ aus streng normalen Werten des Paares $(\frac{1}{r}f, M_r)$ für $r \in (0, r_0]$ besteht.



(3.21) SATZ

Das Potential q sei schwachstetig auf $X := H_L$.

Für $u \in M_r$ gelte $\langle Q(u), u \rangle_L \leq 2q(u)$.

$\hat{f}^{-1}(J)$ sei beschränkt in X für beschränkte Intervalle $J \subseteq (-\infty, \lambda_*)$.

Beh.:

$(-\infty, \lambda_*)$ besteht aus streng normalen Werten des Paares $(\frac{1}{r}f, M_r)$.

Beweis:

Wir wenden Satz (3.14) an auf $\frac{1}{r}f$ und $c := \lambda_* - \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$.

Bedingung (3.15) folgt wie in (3.20) aus :

$$\frac{(F(u), u)}{2r} = \frac{f(u)}{r} + \frac{1}{2r} \{ \langle Q(u), u \rangle_L - 2q(u) \} \leq \frac{1}{r} f(u) \leq \lambda_* - \varepsilon$$

für alle $u \in \widehat{(\frac{1}{r}f)}^c$. ▲

Im Hinblick auf spätere Anwendungen wollen wir noch eine Bemerkung über die Regularität der Lösungen von (3.12) machen. Mit Hilfe der Sätze (3.14), (3.20) und (3.21) können wir zwar die Menge der normalen Werte des Paares (f, M_r) bestimmen und mit (1.17) bzw. (2.9) dann auf die Existenz kritischer Punkte schließen, diese kritischen Punkte u sind jedoch zunächst nur schwache Lösungen von (3.12), denn sie liegen nur in H_L bzw. erfüllen nur die Eigenwertgleichung $F(u) = \lambda G(u)$. Erst wenn bewiesen ist, daß u in $D(L+N)$ liegt, löst u das Eigenwertproblem (3.12) auch im klassischen Sinne. Unter welcher Zusatzannahme alle Lösungen klassische Lösungen von (3.12) sind, macht das folgende Lemma klar :

(3.22) LEMMA

Liegt H_L ganz in $D(N)$, so sind alle kritischen Punkte von f bezüglich M_r aus $D(L+N)$ und erfüllen (3.12), d.h.: $Lu + N(u) = \lambda \cdot u$.

Beweis:

Wegen $D(N) \supseteq H_L$ gilt für alle $u, v \in H_L$: $N(u) \in H$ und

$$\langle Q(u), v \rangle_L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{ q(u+tv) - q(u) \} = \langle N(u), v \rangle \quad .$$

Daher hat man für jeden kritischen Punkt $u \in H_L$ (d.h.: Lösung von $F(u) = \lambda G(u)$) und beliebiges $v \in D(L)$ die Beziehung:

$$\begin{aligned} \langle u, Lv \rangle &= \langle u, v \rangle_L = \langle F(u), v \rangle_L - \langle Q(u), v \rangle_L = \lambda \langle G(u), v \rangle_L - \langle Q(u), v \rangle_L \\ &= \lambda \langle u, v \rangle - \langle N(u), v \rangle = \langle \lambda u - N(u), v \rangle. \end{aligned}$$

Da L selbstadjungiert ist, folgt hieraus $u \in D(L)$ und $Lu + N(u) = \lambda u$.



Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir den Zusammenhang unserer Ergebnisse mit bekannten Resultaten aus der Literatur demonstrieren. Amann [1], Coffmann [1], Rabinowitz [3], Vainberg [4], Zeidler [5] und andere [15], [16], [20], [23] geben in einer Reihe von Arbeiten Kriterien dafür an, daß unendlich viele verschiedene Lösungen des Eigenwertproblems $F(u) = \lambda \cdot G(u)$ existieren. Allen gemeinsam ist, daß sie diese Lösungen als kritische Punkte von f auf einer beschränkten Mannigfaltigkeit M_r suchen; es sind also im Vergleich zu den Sätzen (3.8), (3.14), (3.20) und (3.21) die Rollen von f und g vertauscht.

Wie leiten diese Ergebnisse als Spezialfälle der Sätze (1.17) bzw. (2.9) her. Dazu bestimmen wir in der jeweiligen Situation die Menge der (streng) normalen Werte des Paares (f, M_r) und zeigen, daß ihr Urbild unter $\hat{f}$ in M_r Genus $+\infty$ besitzt.

(3.23) SATZ (vgl. Amann [1], Zeidler [50])

Vor.: Die Funktionale f, g erfüllen die Voraussetzungen (A), (B).

G genügt der Bedingung (S_1) , F ist stark folgenstetig,

$f(u) \neq 0 \Rightarrow F(u) \neq 0$.

M_r ist beschränkt.

Beh.:

a) Das Eigenwertproblem $F(u) = \lambda \cdot G(u)$ besitzt unendlich viele verschiedene Eigenfunktionen aus M_r , falls $\{u \in M_r \mid f(u) \neq 0\}$ kompakte Teilmengen mit beliebig hohem Genus enthält.

b) Die Zahlen

$$\beta_j := \sup_{\substack{A \in M_r, A \text{ kompakt} \\ \text{Genus}(A) \geq j}} \inf_{u \in A} |f(u)|$$

sind wohldefiniert und falls β_j positiv ist, existiert eine Eigenfunktion $u_j \in M_r$ mit $|f(u_j)| = \beta_j$ und $F(u_j) = \lambda_j G(u_j)$.

c) Gilt $\beta_j = \beta_{j+1} = \dots = \beta_{j+q-1} > 0$, so hat die Menge aller Lösungen $u \in M_r$ von $F(u) = \lambda \cdot G(u)$ mit $|f(u)| = \beta_j$ mindestens Genus q .

Beweis:

Wir leiten das Ergebnis von Amann aus Satz (1.17) her:

Da M_r beschränkt ist, genügt es nach Lemma (1.11) zu zeigen, daß $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ aus normalen Werten von f besteht. Der Beweis hierzu verläuft wie der Beweis von Lemma (3.5) in [1]. Die Behauptung erhält man nun unmittelbar durch Anwendung von (1.17) auf f und $-f$.



(3.24) SATZ (vgl. Vainberg [48])

Das Funktional $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ habe den starkstetigen Gradienten F auf der Kugel $\|x\| \leq R$ des reellen Hilbertraumes H und es gelte $f(0) = 0$.

Der Operator F sei ungerade und positiv, d.h.: $\langle F(u), u \rangle > 0$ für $u \neq 0$.

$g: H \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $g(u) := \frac{1}{2}\|u\|^2$.

Beh.:

- a) Zu jedem $r \in (0, R^2/2)$ existieren unendlich viele verschiedene nichttriviale Lösungen von $F(u) = \lambda \cdot u$ mit $\|u\|^2/2 = r$.

Die Zahlen

$$\beta_j := \sup_{\substack{A \in M_r, A \text{ kompakt} \\ \text{Genus}(A) \geq j}} \inf_{u \in A} f(u)$$

sind wohldefinierte, positive kritische Werte von f auf $M_r(g)$.

- b) Die Folge $\{\beta_j\}$ der zugehörigen kritischen Punkte konvergiert schwach gegen Null in H . Außerdem gilt $\lim_{j \rightarrow \infty} \beta_j = 0$.

Beweis:

Wir zeigen: $(-\infty, 0)$ besteht aus streng normalen Werten des Paares $(-f, M_r)$. Da außerdem $\text{Genus}(-\hat{f}^0) = \text{Genus}(M_r) = +\infty$ erfüllt ist, folgt dann Teil a) der Behauptung sofort aus Satz (2.9).

F ist als starkstetiger Operator gleichmäßig stetig auf beschränkten Teilmengen von H , folglich sind die Voraussetzungen (A), (B) für f, g erfüllt, solange $0 < r < \frac{R^2}{2}$ gilt. (Die Voraussetzungen (A), (B) beziehen sich zwar auf den gesamten Raum, werden jedoch nur auf Umgebungen von $M_r(g)$ benutzt.) Da $M_r(g)$ beschränkt in H ist, genügt es zu zeigen, daß $(-\infty, 0)$ aus streng normalen Werten von $-\hat{f}$ besteht.

Ist $\{u_n\} \in M_r$ eine Folge mit $-f(u_n) \rightarrow d \in (-\infty, 0)$ und $d_{u_n}(-\hat{f}) \rightarrow \theta$,

so nehmen wir o.E. an, daß für eine Teilfolge von $\{u_n\}$ gilt:

$$u_n \rightarrow u, \quad F(u_n) \rightarrow F(u) \quad \text{und} \quad \lambda_n := \frac{\langle F(u_n), u_n \rangle}{2r} \rightarrow \lambda := \frac{\langle F(u), u \rangle}{2r}.$$

Wegen $f(u_n) \rightarrow f(u) = -d \neq 0$ muß u von Null verschieden sein, folglich ist auch λ von Null verschieden, d.h.: positiv: $\lambda > 0$.

Damit gilt für die Folge $x_n := u_n - u$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda \langle x_n, x_n \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda \langle u_n, x_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \lambda_n u_n, x_n \rangle = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \lambda_n u_n - F(u_n), x_n \rangle + \lim_{n \rightarrow \infty} \langle F(u_n) - F(u), x_n \rangle + \lim_{n \rightarrow \infty} \langle F(u), x_n \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \lambda_n u_n - F(u_n), u_n - u \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (d_{u_n}(-f))(t_{u_n}(u_n - u)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (d_{u_n} f)(t_{u_n}(u)) = 0. \end{aligned}$$

Also hat man $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|^2 = 0$ und d ist streng normaler Wert von $-f$.

Der Beweis zu b) beruht auf speziellen Eigenschaften schwachstetiger

Funktionale und soll hier nicht durchgeführt werden (vgl. [48], Satz 14.3).



§ 4 Anwendungen

Die in den früheren Kapiteln gewonnenen allgemeinen Aussagen sollen nun auf konkrete Probleme angewendet werden. Wir haben solche Beispiele ausgewählt, deren Behandlung mit Variationsmethoden aufgrund der oben beschriebenen Schwierigkeiten bislang nicht, oder nur bedingt möglich ist.

Anhand des linearen Eigenwertproblems $Lu = \lambda \cdot u$ überprüfen wir, in welchem Verhältnis die in Satz (2.9) gemachten Konvergenzaussagen für Ritzapproximationen im linearen Fall zu den bekannten Konvergenzkriterien stehen. Es zeigt sich (Satz (4.2)), daß Satz (2.9) die gleiche Konvergenzaussage wie in [40] liefert und folglich die Ergebnisse von Kato [25], Michlin [32] und Klahn [27] verschärft.

Für die nichtlineare Klein-Gordon Gleichung gelingt es, die Existenz wenigstens eines Paares $(u, -u)$ nichttrivialer Lösungen beliebiger L_2 -Norm nachzuweisen (s. Satz (4.6)), in Übereinstimmung mit dem auf anderem Wege gewonnenem Resultat von Stuart [44].

Ähnlich liegen die Verhältnisse bei der eindimensionalen Choquard-Gleichung (s. Satz (4.8)). Hier kann man jedoch, was bisher wohl nicht bekannt war, nach einer kleinen Umformung auch die Standardergebnisse der Ljusternik-Schnirelmann Theorie anwenden, und erhält so zu festem Eigenwert $\lambda < 0$ unendlich viele nichttriviale Lösungen, deren Normen gegen $+\infty$ streben.

Für die Hartree-Gleichung des Helium-Atoms weisen wir die Existenz mindestens einer nichttrivialen, radialsymmetrischen Lösung auf der $L_2(\mathbb{R}^3)$ -Einheitssphäre nach. Für genügend kleine L_2 -Sphären kann man man sogar die Existenz beliebig vieler nichttrivialer Lösungen nachweisen.

Während diese vier Beispiele alle von der Form (3.12) mit $X=H_L$ sind, behandeln wir abschließend auch Probleme, in denen X echter Teilraum von H_L ist. Es sind dies im wesentlichen die in [34] behandelten Eigenwertprobleme mit kompakt invertierbaren Differentialoperatoren im $L_2([0,1])$. Mit Satz (2.9) und (3.21) werden die in [34], Kapitel 3 gewonnenen Ergebnisse verschärft.

Zunächst behandeln wir

a) das lineare Eigenwertproblem $Lu = \lambda \cdot u$ mit $u \in D(L) \subseteq H$

als einfachstes Beispiel eines Problems der Form $Lu + N(u) = \lambda \cdot u$ mit identisch verschwindender Nichtlinearität $N(u) \equiv 0$ und einem linearen Anteil L wie in (3.12).

Neben einer Existenzaussage erhält man aus Satz (2.9) auch eine Konvergenzaussage für Ritzapproximationen an die Eigenwerte von L . Wir wollen nun sehen, von welcher Qualität diese Konvergenzaussage ist.

Dazu bezeichne mit $f, g: H_L \longrightarrow \mathbb{R}$ die durch $f(u) := \frac{1}{2} \|u\|_L^2$ und $g(u) := \frac{1}{2} \|u\|^2$ definierten Funktionale und die unterhalb von λ_* liegenden Eigenwerte von L entsprechend ihrer geometrischen Vielfachheit mit $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m \leq \lambda_*$ $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Satz (3.21) besagt, daß $(-\infty, \lambda_*)$ aus streng normalen Werten des Paares $(\frac{1}{r}f, M_r)$ besteht und aus Satz (2.9) a) erhält man die Existenz der m kritischen Werte des Rayleigh-Quotienten $R(u) := \frac{1}{r} \cdot f(u)$, denn es ist $m = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\frac{1}{r}f^{\wedge \lambda_* - \varepsilon})$.

Ist $\{X_N\}$ eine aufsteigende Folge endlichdimensionaler Unterräume von H_L , so bezeichne mit $\bigwedge_{i,N}$ die, der Größe nach geordneten, auf dem

üblichen Wege gewonnenen Ritzapproximationen an λ_i , d.h.:

$$\Lambda_{i,N} := \inf_{\substack{E_i \subseteq X_N \\ E_i \text{ i-dim-} \\ \text{U-Raum}}} \sup_{u \in E_i \setminus \{0\}} R(u) \quad \begin{array}{l} i \in \{1, \dots, m\} \\ N \geq i \end{array}$$

Es gilt dann $\Lambda_{i,N} \geq \lambda_i$ für alle $N \geq i$ und die $\Lambda_{i,N}$ bilden eine in N monoton nichtwachsende Folge reeller Zahlen.

(4.1) LEMMA

Für $i \in \{1, \dots, m\}$ und alle $N \geq i$ gilt:

- a) $\lambda_i = b_i = \hat{b}_i$
- b) $\Lambda_{i,N} = \hat{b}_{i,N}$

Beweis

Es genügt a) zu zeigen, b) ergibt sich durch Anwendung von a) auf

$(\pi_N^L|_{X_N}) : X_N \rightarrow X_N$. $\pi_N : H \rightarrow X_N$ bezeichne die orth. Projektion auf X_N .

Für beliebiges $i \in \{1, \dots, m\}$ gilt trivialerweise $b_i \leq \hat{b}_i \leq \lambda_i$; ebenso ist die Behauptung klar für $i \in \{1, \dots, j\}$, sofern $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_j$.

Sei also $i > j$ sowie $A \in M_r$ eine Menge mit $\text{Genus}(A) \geq i$ und

$$\sup_{u \in A} R(u) = \sup_{u \in A} \frac{\|u\|_L^2}{\|u\|^2} \leq \lambda < \lambda_i.$$

Aus (3.18) folgt: $\|E_\lambda u\| \geq \text{const} > 0$ für alle $u \in A$, da A von Null wegbeschränkt ist. Andererseits ist $\dim(E_\lambda H) \leq i-1$, da die Eigenwerte entsprechend ihrer geometrischen Vielfachheit gezählt wurden. Also ist $\text{Genus}(A) \leq \text{Genus}(E_\lambda(A)) \leq i-1$ im Widerspruch zur Annahme. Folglich gilt $b_i \geq \lambda_i$ und die Behauptung ist bewiesen.



(4.2) SATZ

Ist $\{X_N\}_{N=1}^{\infty}$ eine in H_L dichte Folge endlichdimensionaler Unterräume, so konvergieren die Ritzapproximationen $\Lambda_{i,N}$ gegen die Eigenwerte λ_i des Operators L für $i \in \{1, \dots, m\}$.

Beweis:

Folgt unmittelbar aus (2.9), (3.21) und (4.1).

(4.3) Bemerkung

Seit langem [24], [21] ist bekannt, daß die Ritzapproximationen $\Lambda_{i,N}$ gegen λ_i konvergieren, sofern das Unterraumsystem $\{X_N\}$ vollständig in $H_{L^2} := (D(L), \langle u, v \rangle_{L^2} := \langle Lu, Lv \rangle)$ ist. Michlin [32] hat bewiesen, daß Konvergenz gegen den kleinsten Eigenwert λ_1 auch eintritt, wenn $\{X_N\}$ nur vollständig in H_L ist. Ebenso zeigte Klahn [27] unter dieser Voraussetzung auch Konvergenz bei höheren Eigenwerten, sofern diese nur einfach sind. Satz (4.2) zeigt, daß die Behauptung von Klahn auch ohne die Forderung einfacher Eigenwerte gültig ist und entspricht dem auf andere Art gewonnenem Ergebnis in [10].

b) Klein-Gordon Gleichung

Gesucht sind Lösungen des nichtlinearen Eigenwertproblems

$$(4.4) \quad -u''(x) - g \frac{|u(x)|^6}{x^6} \cdot u(x) = \lambda \cdot u(x) \quad \text{mit} \quad u(0) = 0 \quad \text{und} \quad u \in L_2(0, \infty), \quad g, \lambda > 0,$$

das in den Arbeiten [8], [35], [44], [45] behandelt worden ist.

Unter anderem beweist Stuart in seinem Artikel [45] für $0 < \theta < 4/3$ die Existenz nichttrivialer Lösungen von (4.4), indem er das Infimum des Funktionals

$$(4.5) \quad f(u) := \frac{1}{2} \int_0^\infty u'^2(x) dx - \frac{g}{6+2} \int_0^\infty \frac{|u(x)|^6}{x^6} \cdot dx \quad u \in \tilde{W}_{1,2}(0, \infty)$$

auf den (im $\tilde{W}_{1,2}(0, \infty)$ unbeschränkten) Sphären

$$M_r := \left\{ u \in \tilde{W}_{1,2}(0, \infty) \mid \frac{1}{2} \int_0^\infty u'^2(x) dx = r \right\}$$

sucht und zeigt, daß dieses Infimum auf M_r angenommen wird (vgl. Theorem 2.1 und 4.1 in [45]).

Wir erhalten, wenn auch auf einem etwas anderen Wege, dieses Ergebnis als Spezialfall aus Satz (3.21), (3.22) und (2.9).

(4.6) SATZ

Für jedes $g \in (0, 4/3)$ und zu jedem $r > 0$ existiert mindestens ein Paar $(\bar{u}, -\bar{u})$ nichttrivialer Lösungen von (4.4).

$$\hat{b}_1 := \inf_{\substack{A \in M_r \\ \delta(A) \geq 1}} \sup_{u \in A} f(u) = \inf_{u \in M_r} f(u)$$

ist kritischer Wert von f auf M_r und für die Ritzapproximationen

$$\hat{b}_{1,N} := \inf_{u \in M_r \cap X_N} f(u)$$

gilt: $\lim \hat{b}_{1,N} = \hat{b}_1$ sofern das System $\{X_N\}$ vollständig im $\dot{W}_{1,2}(0,\infty)$ ist. Jede Folge $\{\bar{u}_{1,N}\}$ von Funktionen mit $f(\bar{u}_{1,N}) = \hat{b}_{1,N}$ enthält eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert Lösung von (4.4) ist.

Beweis:

Die Voraussetzungen von Satz (3.21) sind erfüllt, denn :

i) auf $X := H_L := \dot{W}_{1,2}(0,\infty)$ ist das Funktional q , definiert durch

$$q(u) := - \frac{g}{(\sigma+2)} \cdot \int_0^\infty \frac{|u(x)|^{\sigma+2}}{x^\sigma} dx$$

schwachstetig (vgl: [8], Lemma 3), und sein Gradient Q ist gleichmäßig stetig auf beschränkten Teilmengen von $\dot{W}_{1,2}$, da Q starkstetig ist (vgl. [8], S. 254).

ii) für $u \in M_r$ gilt $\langle Q(u), u \rangle_L \leq 2q(u)$, denn

$$\langle Q(u), u \rangle_L = -g \int_0^\infty \frac{|u(x)|^{\sigma+2}}{x^\sigma} dx \leq \frac{-2g}{(\sigma+2)} \int_0^\infty \frac{|u(x)|^{\sigma+2}}{x^\sigma} dx = 2q(u)$$

iii) für $0 < \sigma < \frac{4}{3}$ ist f auf M_r nach unten beschränkt und $\hat{f}^0$ in H_L beschränkt, denn es gilt: (vgl.: [45])

$$f(u) = \frac{1}{2} \|u'\|^2 - \frac{g}{(\sigma+2)} \int_0^\infty \frac{|u(x)|^{\sigma+2}}{x^\sigma} dx = \frac{1}{2} \|u'\|^2 - \frac{g}{(\sigma+2)} (2\|u'\|)^{3\sigma/2} \|u\|^{2-\sigma/2}.$$

Also besteht $(-\infty, \lambda_*) = (-\infty, 0)$ aus streng normalen Werten des Paares

$(\frac{1}{r}f, M_r)$. Die Behauptung folgt nun aus Satz (2.9) und Lemma (3.22), wenn wir bewiesen haben, daß $D(N) \geq H_L$ und $\chi((\frac{1}{r}f)^c) \geq 1$ gilt für ein $c < 0$.

Letzteres entspricht Stuarts Forderung " $\inf \{ f(u) \mid u \in M_r \} < 0$ " und wird wie dort durch Angabe einer Testfunktion $u(x) := (2z)^{3/2} r^{-1} x e^{-zx}$ nach-

geprüft: für $z^{2-3\epsilon/2} := \frac{-3g\epsilon}{4} \left(\frac{2}{(\epsilon+2)} \right)^4 (8r)^{\epsilon/2}$ hat man $u \in M_r$ und $\frac{1}{r}f(u) = z^2 \left\{ 1 - 4/(3\epsilon) \right\} =: c < 0$, also $\delta((\frac{1}{r}f)^c) \geq 1$.

Die Eigenschaft $D(N) \supseteq H_L$ sorgt dafür, daß alle kritischen Punkte auch klassische Lösungen von (4.4) sind und wird wie folgt bewiesen:

Für $u \in H_L = \dot{W}_{1,2}(0,\infty)$ hat man: $|u(x)| = \left| \int_0^x u'(s) ds \right| \leq \|u'\| \sqrt{x}$, also gilt $\frac{|u(x)|^{2\epsilon}}{|x|^\epsilon} \leq \|u'\|^{2\epsilon}$. Durch Anwendung von Hardy's Ungleichung: $\int_0^\infty \left(\frac{u(x)}{x} \right)^2 dx \leq 4 \|u'\|^2$ und Verwendung der Hölderschen Ungleichung mit $p:=2/\epsilon > 1$ und $q:=2/(2-\epsilon)$ erhält man für die L_2 -Norm von $N(u)$ die Abschätzung:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (N(u)(x))^2 dx &= \int_0^\infty \frac{|u(x)|^{2\epsilon+2}}{x^{2\epsilon}} dx = \int_0^\infty \left(\frac{|u(x)|^{2\epsilon}}{x^\epsilon} \right) \left(\frac{|u(x)|^2}{x^\epsilon} \right) dx \\ &\leq \|u'\|^{2\epsilon} \int_0^\infty \left(\frac{|u(x)|^\epsilon}{x^\epsilon} \right) (|u(x)|^{2-\epsilon}) dx \\ &\leq \|u'\|^{2\epsilon} \left(\int_0^\infty \left(\frac{|u(x)|}{x} \right)^2 dx \right)^{\epsilon/2} \left(\int_0^\infty |u(x)|^{2-\epsilon} dx \right)^{\frac{2}{2-\epsilon}} \\ &\leq \|u'\|^{2\epsilon} (4\|u'\|^2)^{\epsilon/2} \|u\|^{2-\epsilon} \\ &= (2\|u'\|^3)^\epsilon \|u\|^{2-\epsilon}. \end{aligned}$$

Damit ist alles bewiesen.



Von der Struktur her der Klein-Gordon Gleichung nahe verwandt ist die folgende

c) Choquard Gleichung

$$(4.7) \quad -u''(x) - 2u(x) \cdot \left\{ \frac{1}{x} \cdot \int_0^x u^2(y) dy + \int_x^\infty \frac{u^2(y)}{y} dy \right\} = \lambda \cdot u(x); \quad \begin{matrix} u(0)=0 \\ u \in L_2(0, \infty) \end{matrix}$$

die in [11], [15] behandelt worden ist.

Es gilt ein zu (4.6) analoger Existenz- und Konvergenzsatz :

(4.8) SATZ

Zu jedem $r > 0$ existiert mindestens ein Paar $(\bar{u}, -\bar{u})$ nichttrivialer Lösungen von (4.7). Mit $f: H_L = \dot{W}_{1,2}(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(u) := \frac{1}{2} \int_0^\infty u'^2(x) dx - \int_0^\infty \frac{u^2(x)}{x} \left(\int_0^x u^2(y) dy \right) dx, \quad ,$$

sowie $M_r := \left\{ u \in \dot{W}_{1,2}(0, \infty) \mid \frac{1}{2} \int_0^\infty u'^2(x) dx = r^2 \right\}$ ist $\hat{b}_1 := \inf_{u \in M_r} f(u)$ kritischer Wert von f auf M_r und für die Ritzapproximationen

$(\hat{b}_{1,N}, \bar{u}_{1,N})$ gelten die gleichen Konvergenzaussagen wie in Satz (4.6).

Beweis

Die Behauptung folgt aus Satz (3.21) und (2.9), wenn man zeigt, daß

a) f auf M_r nach unten beschränkt und $\hat{f}^0$ in H_L beschränkt ist,

b) $q(u) := - \int_0^\infty \frac{u^2(x)}{x} \left(\int_0^x u^2(y) dy \right) dx$ schwachstetig auf $H_L := \dot{W}_{1,2}(0, \infty)$

ist und einen gleichmäßig stetigen Gradienten Q auf beschränkten

Teilmenge von H_L besitzt,

c) $\gamma(\frac{1}{r} \hat{f}^c) \geq 1$ für ein $c < 0$ erfüllt ist,

d) $N(u)$ in H liegt für $u \in H_L$.

Teil a) ergibt sich aus Hardy's Ungleichung, denn es gilt für $u \in H_L$:

$$f(u) = \frac{1}{2} \|u'\|^2 + q(u) \geq \frac{1}{2} \|u'\|^2 - \|u\|^2 \int_0^\infty \frac{u^2(x)}{x} dx \geq \frac{1}{2} \|u'\|^2 - 2 \|u\|^3 \|u'\|.$$

Zum Nachweis von b) definieren wir die 3-Linearform $\tilde{Q}$ durch:

$$\langle \tilde{Q}(u_1, u_2, u_3), w \rangle_L := 4 \int_0^\infty \frac{w(x) u_1(x)}{x} \left(\int_0^x u_2(y) u_3(y) dy \right) dx$$

Bezeichnet man für beliebiges $R > 0$ mit $\|u\|_R$ die Norm von $L_2(0, R)$:

$$\|u\|_R := \left(\int_0^R u^2(x) dx \right)^{1/2}, \text{ so hat man für } \tilde{Q} \text{ die Abschätzung:}$$

$$|\langle \tilde{Q}(u_1, u_2, u_3), w \rangle_L| \leq 8 \|w'\| \|u_1\|_R \|u_2\|_R \|u_3\|_R + \frac{4}{R} \|w\| \|u_1\| \|u_2\| \|u_3\|$$

Die Schwachstetigkeit von q auf H_L folgt aus der kompakten Einbettung von $\dot{W}_{1,2}(0, R)$ in $L_2(0, R)$ und: (beachte: $\langle \tilde{Q}(u_1, u_2, u_3), w \rangle_L = \langle \tilde{Q}(w, u_2, u_3), u_1 \rangle_L$)

$$\begin{aligned} |q(u) - q(v)| &= \frac{1}{4} |\langle Q(u), u \rangle_L - \langle Q(v), v \rangle_L| \\ &= \frac{1}{4} |\langle \tilde{Q}(u, u, u), u \rangle_L - \langle \tilde{Q}(v, v, v), v \rangle_L| \\ &= \frac{1}{4} |\langle \tilde{Q}(u-v, u, u), u \rangle_L + \langle \tilde{Q}(v, u-v, u), u \rangle_L + \langle \tilde{Q}(v, v, u-v), u \rangle_L + \\ &\quad + \langle \tilde{Q}(v, v, v), u-v \rangle_L| \\ &\leq \text{const} \|u-v\|_R + \text{const} \cdot \frac{1}{R}. \end{aligned}$$

Die Gleichmäßige Stetigkeit des Gradienten Q von q folgt aus der Abschätzung :

$$|\langle \tilde{Q}(u_1, u_2, u_3), w \rangle_L| \leq 8 \|w'\| \|u_1\| \|u_2\| \|u_3\|$$

und der für u, v aus einer beschränkten Teilmenge von H_L gültigen Ungleichung:

$$\begin{aligned} \|Q(u) - Q(v)\|_L &= \sup_{\|w\|_L \leq 1} |\langle Q(u) - Q(v), w \rangle_L| \\ &= \sup_{\|w\|_L \leq 1} |\langle \tilde{Q}(u-v, u, u) + \tilde{Q}(v, u-v, u) + \tilde{Q}(v, v, u-v), w \rangle_L| \\ &\leq \text{const } \|u-v\|. \end{aligned}$$

Die Bedingung " $\gamma(\frac{1}{r}c) \geq 1$ für ein $c < 0$ " ist für $c := -(5r/8)^2 < 0$ erfüllt, denn für die Testfunktion $u(x) := (5r/4)^{3/2} \sqrt{r} x e^{-5rx/8}$ gilt: $u \in M_r$ und $\frac{1}{r}f(u) = c$. Damit ist auch Teil c) nachgewiesen.

d) folgt aus:

$$\int_0^\infty (N(u)(x))^2 dx = \int_0^\infty \left(\frac{2u(x)}{x} \int_0^x u^2(y) dy + 2u(x) \int_x^\infty \frac{u^2(y)}{y} dy \right)^2 dx \leq 64 \|u\|^4 \cdot \|u'\|^2. \quad \blacktriangle$$

Auch die üblichen Ergebnisse der Ljusternik-Schnirelmann Theorie lassen sich, nach einer kleinen Umformung, ebenfalls auf die Choquard-Gleichung (4.7) anwenden. Man erhält den, bislang wohl nicht bekannten

(4.9) SATZ

Zu jedem festen $\lambda < 0$ existieren unendlich viele verschiedene Lösungen

$\{u_j(\lambda)\}_{j=1}^\infty \in W_{2,2}(0, \infty)$ der Gleichung (4.7) mit $u(0) = 0$.

Für diese Lösungen gilt $\lim_{j \rightarrow \infty} \|u_j(\lambda)\|_{1,2} = +\infty$.

Beweis

Wir wenden Satz (3.25) an auf das Funktional $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, das definiert ist durch:

$$f(u) := \int_0^\infty \frac{u^2(x)}{x} \left(\int_0^x u^2(y) dy \right) dx = -q(u)$$

für u aus dem Hilbertraum $X := \overline{(C_0^\infty(0, \infty), \langle u, v \rangle_X)}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_X := \int_0^\infty \{ u'(x)v'(x) - \lambda u(x)v(x) \} dx \quad .$$

Die von diesem Skalarprodukt erzeugte Norm ist äquivalent zur Norm des $\dot{W}_{1,2}(0, \infty)$, d.h.: es gibt Konstanten $k, K > 0$, so daß für $u \in X$ gilt:

$$k \cdot \|u\|_X^2 \leq \|u\|^2 + \|u'\|^2 \leq K \cdot \|u\|_X^2 \quad .$$

Die Positivität von $F := \text{grad } f$ auf X ist klar, die Starkstetigkeit von F auf beschränkten Teilmengen von X folgt aus der oben bewiesenen Schwachstetigkeit von f und der gleichmäßigen Stetigkeit von F (vgl. [4], Satz 7.3 bzw. 7.4). Damit existieren nach Satz (2.9) bzw. (3.25) auf jeder Sphäre $M_r := \{ u \in X \mid \frac{\|u\|_X^2}{2} = r \}$ von X unendlich viele verschiedene kritische Werte von f und diese lassen sich charakterisieren durch:

$$c_j := \sup_{\substack{A \in M_r \\ \gamma(A) \geq j}} \inf_{u \in A} f(u) = - \inf_{\substack{A \in M_r \\ \gamma(A) \leq j}} \sup_{u \in A} (-f(u)) = -\hat{b}_j \quad (j \in \mathbb{N}).$$

Die zugehörigen kritischen Punkte $v_j \in M_r$ sind Lösungen des Eigenwertproblems $F(v_j) = \mu_j v_j$ mit $\|v_j\|_X^2 = 2r$ und bilden in X eine schwache Nullfolge: $v_j \xrightarrow{X} 0$ und $\mu_j \rightarrow 0$ für $j \rightarrow +\infty$.
Somit gilt für beliebiges $w \in X$: (vgl.: (3.22))

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mu_j v_j - F(v_j), w \rangle_X = \\ &= \mu_j \cdot \int_0^\infty \{ v_j'(x)w'(x) - \lambda v_j(x)w(x) \} dx - 2 \cdot \int_0^\infty w(x)v_j(x) \left\{ \frac{1}{x} \int_0^x v_j^2(y) dy + \int_x^\infty \frac{v_j(y)}{y} dy \right\} dy \end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort: $v_j \in W_{2,2}(0, \infty)$ und für $u_j := v_j / \sqrt{\mu_j}$ gilt dann:

$$-u_j''(x) - 2u_j(x) \left\{ \frac{1}{x} \int_0^x u_j^2(y) dy + \int_x^\infty \frac{u_j^2(y)}{y} dy \right\} = \lambda u_j(x) \quad ; \quad u_j(0) = 0$$

sowie $\|u_j\|_{1,2}^2 \geq k \|u_j\|_X^2 = \frac{2rk}{\mu_j} \longrightarrow \infty$ für $j \longrightarrow \infty$.

Damit sind alle Behauptungen in (4.9) bewiesen. ▲

Bis auf einen konstanten Faktor die gleiche Nichtlinearität wie die Choquard-Gleichung besitzt die

d) Hartree-Gleichung des Heliumatoms

$$(4.10) \quad -\frac{1}{2} u''(x) - \frac{2u(x)}{x} + 4\pi u(x) \left\{ \frac{1}{x} \int_0^x u^2(y) dy + \int_x^\infty \frac{u^2(y)}{y} dy \right\} = \lambda \cdot u(x)$$

mit $u(0) = 0, u \in L_2(0, \infty)$,

die in [3], [5], [6], [9], [23], [39], [46], [47], [49] behandelt worden ist. Aus physikalischen Gründen ist man an Lösungen interessiert, die zusätzlich die Normierungsbedingung

$$(4.11) \quad g(u) := \frac{1}{2} \int_0^\infty u^2(x) dx = \frac{1}{8\pi}$$

erfüllen. Die Hartree-Gleichung (4.10) ist, nach Addition von $3u(x)$ auf beiden Seiten, ebenfalls von der Form (3.12). Der lineare Operator $L: D(L) \subseteq H \longrightarrow H := L_2(0, \infty)$ ist definiert durch:

$$D(L) := \left\{ u \in W_{2,2}(0, \infty) \mid u(0) = 0 \right\}, \quad L(u)(x) := -\frac{1}{2} u''(x) - \frac{2u(x)}{x} + 3u(x)$$

und das Potential $f: H_L \longrightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch:

$$f(u) := \frac{1}{4} \int_0^\infty u'^2(x) dx - \int_0^\infty \frac{u^2(x)}{x} dx + \frac{3\|u\|^2}{2} + 2\pi \int_0^\infty \frac{u^2(x)}{x} \left(\int_0^x u^2(y) dy \right) dx.$$

Hier wird es also schon durch die Problemstellung nahegelegt, Lösungen von (4.10) als Extrempunkte von f auf der durch (4.11) definierten (in $X := H_L$ unbeschränkten) Mannigfaltigkeit zu suchen.

Dazu müssen wir die Menge der (streng) normalen Werte des Paares

(f, M_r) kennen; $M_r := \left\{ u \in H_L = \dot{W}_{1,2}(0, \infty) \mid g(u) = r \right\}$.

(4.12) LEMMA

- a) Für $r > 0$ besteht $(-\infty, 2r)$ aus streng normalen Werten des Paares (f, M_r) .
- b) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $r_0 > 0$, so daß für alle $r \in (0, r_0)$ das Intervall $(-\infty, 3 - \varepsilon)$ aus streng normalen Werten des Paares $(\frac{1}{r}f, M_r)$ besteht.
- c) In b) kann man $r_0 := \varepsilon / (128\pi)$ wählen.

Beweis:

Wir wenden Satz (3.14) an :

Für $c \leq 3r$ und beliebiges $u \in \hat{f}^c$ gilt:

$$\frac{1}{4} \|u'\|^2 - 2 \|u\| \cdot \|u'\| \leq \frac{1}{4} \int_0^\infty u'^2(x) dx - \int_0^\infty \frac{u^2(x)}{x} dx \leq f(u) - 3r \leq 0$$

also $\|u'\| \leq 8 \|u\|$, woraus wegen $\|u\|^2 = 2r$ die Beschränktheit von $\hat{f}^c$ in $X := H_L = \dot{W}_{1,2}(0, \infty)$ folgt für $c \leq 3r$.

Für $c := 2r - \delta$, $\delta > 0$ beliebig, hat man andererseits mit $\varepsilon := \frac{2\delta}{r}$

wegen

$$\frac{1}{4} \int_0^\infty u'^2(x) dx - \int_0^\infty \frac{u^2(x)}{x} dx \geq (-2) \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty u^2(x) dx$$

die Abschätzung:

$$\begin{aligned} \frac{\langle F(u), u \rangle_L}{2r} &= \frac{1}{2r} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty u'^2(x) dx - 2 \int_0^\infty \frac{u^2(x)}{x} dx + 3 \int_0^\infty u^2(x) dx + 8\pi \int_0^\infty \frac{u^2(x)}{x} \left(\int_0^x u^2(y) dy \right) dx \right\} \\ &= \frac{1}{r} \left\{ f(u) + 2\pi \int_0^\infty \frac{u^2(x)}{x} \left(\int_0^x u^2(y) dy \right) dx \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{1}{r} \left\{ f(u) + \left[\frac{1}{4} \int_0^\infty u^2(x) dx - \int_0^\infty \frac{u^2(x)}{x} dx + 2r \right] + 2 \int_0^\infty \frac{u^2(x)}{x} \left(\int_0^x u^2(y) dy \right) dx + \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{3}{2} \int_0^\infty u^2(x) dx - 3r \right] \right\} \\
 &= \frac{1}{r} \{ 2f(u) - r \} \leq 3 - \frac{2\delta}{r} = \lambda_* - \varepsilon \quad \text{für alle } u \in \hat{F}^C.
 \end{aligned}$$

Damit besteht nach Satz (3.14) das Intervall $(-\infty, 2r-\delta)$ aus streng normalen Werten des Paares (f, M_r) . Da $\delta > 0$ beliebig gewählt ist, folgt Teil a) der Behauptung.

b) ergibt sich aus Satz (3.20), denn auf beschränkten Teilmengen von X gilt :

$$\langle Q(u), u \rangle_L = 8\pi \int_0^\infty \frac{u^2(x)}{x} \left(\int_0^x u^2(y) dy \right) dx \leq \pi \|u'\| \cdot \|u\|^3 \quad (6)$$

woraus unmittelbar $\lim_{\|u\| \rightarrow 0} \frac{\langle Q(u), u \rangle_L}{\|u\|^2} = 0$ folgt.

c) Mit $c := (3-\varepsilon)-\delta$, $\varepsilon, \delta > 0$ beliebig, und $r \in (0, \varepsilon/(128\pi))$ gilt für $u \in (\frac{1}{r}f)^C$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\langle \frac{1}{r}F(u), u \rangle_L}{2r} &= \frac{1}{r} \left\{ \left(\frac{1}{r}f \right)(u) + \frac{2\pi}{r} \int_0^\infty \frac{u^2(x)}{x} \left(\int_0^x u^2(y) dy \right) dx \right\} \\
 &\leq \frac{1}{r} \left\{ (3-\varepsilon) - \delta + \frac{4\pi}{r} \|u'\| \cdot \|u\|^3 \right\} \\
 &\leq \frac{1}{r} \left\{ (3-\varepsilon) - \delta + \frac{32\pi}{r} \|u\|^4 \right\} \\
 &= \frac{1}{r} \left\{ (3-\varepsilon) - \delta + 128\pi r \right\} \leq \frac{3}{r} - \frac{\delta}{r} = \lambda_*(r) - \frac{\varepsilon}{r}.
 \end{aligned}$$

$\lambda_*(r) := \frac{3}{r}$ bezeichnet den kleinsten Häufungspunkt im Spektrum von $\frac{1}{r}L$.

Die Behauptung folgt nun wie in a) aus Satz (3.14).



(4.13) SATZ

- a) Es existiert mindestens ein Paar $(\bar{u}, -\bar{u})$ nichttrivialer Lösungen der Hartree-Gleichung (4.10), welche die Normierungsbedingung (4.11) erfüllen.

$$b) \hat{b}_1 := \inf_{\substack{A \in M_{1/8\pi} \\ \gamma(A)=1}} \sup_{u \in A} f(u) = \inf \left\{ f(u) \mid u \in H_L \text{ und } \|u\|^2 = 1/4\pi \right\}$$

ist kritischer Wert von f auf $M_{1/8\pi}$ und für die Ritzapproximationen

$$\hat{b}_{1,N} := \inf \left\{ f(u) \mid u \in M_{1/8\pi} \cap X_N \right\} \text{ gilt: } \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{b}_{1,N} = \hat{b}_1, \text{ sofern das System } \{X_N\} \text{ vollständig in } H_L = \dot{W}_{1,2}(0, \infty) \text{ ist.}$$

Jede Folge $\{\bar{u}_{1,N}\}$ von Funktionen aus $M_{1/8\pi} \cap X_N$ mit $f(\bar{u}_{1,N}) = \hat{b}_{1,N}$ enthält eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert Lösung von (4.10), (4.11) ist.

- c) Für $0 < r < (\frac{1}{8n})^2 \frac{1}{2\pi}$ existieren auf jeder Sphäre M_r mindestens n kritische Werte von $(\frac{1}{r}f)$. Diese kann man charakterisieren durch:

$$\hat{b}_j := \inf_{\substack{A \in M_r \\ \gamma(A) \geq j}} \sup_{u \in A} f(u) \quad (1 \leq j \leq n).$$

Die zugehörigen kritischen Punkte sind Lösungen von (4.10). Für die Approximationen $\{\hat{b}_{j,N}\}$ bzw. $\{\bar{u}_{j,N}\}$ gelten die analogen Konvergenzaussagen wie unter b).

(4.14) Bemerkung

Teil b) der Behauptung verschärft die Ergebnisse aus [1], da dort im Konvergenzbeweis die Vollständigkeit des Systems $\{X_N\}$ in

$$H_L^2 := (D(L), \|u\|_L^2 := \|u\|^2 + \|Lu\|^2)$$

vorausgesetzt wurde.

Beweis von (4.13)

Für $r := 1/(8\pi)$ besteht nach (4.12) a) das Intervall $(-\infty, 1/(4\pi))$ aus streng normalen Werten des Paares (f, M_r) . Ferner ist $\chi(\hat{f}^{1/(4\pi)}) \geq 1$, denn für die Testfunktion $u(x) := ((27/8)^3 r)^{1/2} x \cdot \exp(-27x/16)$ gilt: $u \in M_r$ und $f(u) = (1/8\pi)(807/512) < (1/4\pi)$. Somit folgen a) und b) der Behauptung aus Satz (2.9); alle "schwachen" Lösungen von $F(u) = \lambda \cdot G(u)$ sind auch klassische Lösungen von (4.10). (vgl. (3.22) und (4.8) d))
c) Mit $c_n := 3 - 1/(2n^2)$ besteht nach (4.12) b) das Intervall $(-\infty, c_n)$ für alle $r \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < 1/(128\pi)(1/(2n^2))$ aus streng normalen Werten des Paares $(\frac{1}{r}f, M_r)$. Definiert man $h: M_r \rightarrow \mathbb{R}$ durch:

$$h(u) := \frac{1}{4} \int_0^\infty u'^2(x) dx - \int_0^\infty \frac{u^2(x)}{x} dx + 2\pi r \int_0^\infty \frac{u^2(x)}{x} dx + \frac{3}{2} \int_0^\infty u^2(x) dx,$$

so gilt für beliebiges $u \in M_r$: $\frac{1}{r}f(u) \leq \frac{1}{r}h(u)$, insbesondere also auch:

$$\left(\frac{1}{r}\hat{f}\right)^{c_n} \supseteq \left(\frac{1}{r}\hat{h}\right)^{c_n}.$$

Der Operator $S_z: D(S) \rightarrow L_2(0, \infty)$, definiert durch $D(S_z) := \{u \in W_{2,2} \mid u(0) = 0\}$, $S_z(u) := -\frac{1}{2}u''(x) - \frac{2zu(x)}{x} + 3u(x)$ hat bekanntlich die einfachen Eigenwerte μ_j und Eigenfunktionen v_j mit:

$$\mu_j := 3 - \frac{2z}{j^2} \quad v_j := x \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{|\mu_j|}{2z}}x\right) \mathcal{L}_j^{(1)}\left(2\sqrt{\frac{|\mu_j|}{2z}}x\right) \quad j \in \mathbb{N}.$$

$\mathcal{L}_j^{(x)}$ bezeichnen die verallgemeinerten Laguerre-Polynome.

Der von den ersten n Eigenfunktionen v_j aufgespannte Raum $V_n := \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ ist n -dimensional und daher besitzt $M_r \cap V_n$ Genus n :

$$n = \dim V_n = \chi^*(M_r \cap V_n) = \text{Genus}(M_r \cap V_n).$$

Darüber hinaus gilt für beliebiges $v \in M_r \cap V_n$ mit $z := (1-2\pi r)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}h(v) &= \frac{1}{2r} \langle S_z(v), v \rangle \leq \frac{1}{2r} \mu_n \|v\|^2 = \mu_n = 3 - \frac{2}{n^2}(1-2\pi r) \\ &\leq 3 - \frac{1}{2n^2} = c_n. \end{aligned}$$

Also hat man : $M_r \cap V_n \subseteq (\frac{1}{r}h)^{c_n} \subseteq (\frac{1}{r}f)^{c_n}$ und daraus unmittelbar : $\delta((\frac{1}{r}f)^{c_n}) \geq n$ nach (2.8).

Die Behauptung c) folgt nun aus Satz (2.9), denn es ist bewiesen, daß für $0 < r < (1/(256\pi n^2))$ das Intervall $(-\infty, c_n)$ aus streng normalen Werten des Paares $(\frac{1}{r}f, M_r)$ besteht und außerdem $\delta((\frac{1}{r}f)^{c_n}) \geq n$ gilt.



Zum Abschluß behandeln wir in $H:=L_2(0,1)$ die folgenden nichtlinearen Eigenwertprobleme 2.-ter bzw. 4.-ter Ordnung :

$$\begin{aligned}
 (4.15) \quad e) \quad & A_1(u) := -u'' - (u')^3 = \lambda \cdot u & u \in D(A_1) \\
 & A_2(u) := u^{(4)} + (u''^3)'' = \lambda \cdot u & u \in D(A_2) \\
 & A_3(u) := -u'' + (u''^3)'' = \lambda \cdot u & u \in D(A_3) \\
 & A_4(u) := u^{(4)} + u^3 = \lambda \cdot u & u \in D(A_4) \\
 & A_5(u) := -u'' + u^3 = \lambda \cdot u & u \in D(A_5) \\
 & A_6(u) := u^{(4)} - u^3 = \lambda \cdot u & u \in D(A_6) \\
 & A_7(u) := -u'' - u^3 = \lambda \cdot u & u \in D(A_7)
 \end{aligned}$$

wobei die Definitionsbereiche $D(A_i)$ gegeben sind durch:

$$D(A_1) := D(A_5) := D(A_7) := \{u \in W_{2,2}(0,1) \mid u(0)=u(1)=0\} \quad \text{und}$$

$$D(A_2) := D(A_3) := D(A_4) := D(A_6) := \{u \in W_{4,2}(0,1) \mid u(0)=u(1)=u'(0)=u'(1)=0\}$$

Die Operatoren $A_1, \dots, A_5$ wurden als Beispiele für monotone Operatoren mit kompakter Inversen in [4] behandelt (s. [4], Bsp.(1.5), (1.7), (1.11), (1.18), (2.10)). Alle oben aufgeführten Operatoren sind Potentialoperatoren und die zugehörigen Potentiale lauten :

$$\begin{aligned}
 (4.16) \quad & f_1(u) := \frac{1}{2} \langle u', u' \rangle + \frac{1}{4} \langle u'^2, u'^2 \rangle & u \in D(f_1) \\
 & f_2(u) := \frac{1}{2} \langle u'', u'' \rangle + \frac{1}{4} \langle u''^2, u''^2 \rangle & u \in D(f_2) \\
 & f_3(u) := \frac{1}{2} \langle u', u' \rangle + \frac{1}{4} \langle u''^2, u''^2 \rangle & u \in D(f_3) \\
 & f_4(u) := \frac{1}{2} \langle u'', u'' \rangle + \frac{1}{4} \langle u^2, u^2 \rangle & u \in D(f_4) \\
 & f_5(u) := \frac{1}{2} \langle u', u' \rangle + \frac{1}{4} \langle u^2, u^2 \rangle & u \in D(f_5) \\
 & f_6(u) := \frac{1}{2} \langle u'', u'' \rangle - \frac{1}{4} \langle u^2, u^2 \rangle & u \in D(f_6) \\
 & f_7(u) := \frac{1}{2} \langle u', u' \rangle - \frac{1}{4} \langle u^2, u^2 \rangle & u \in D(f_7)
 \end{aligned}$$

mit den Definitionsbereichen $D(f_i) := X_i$, gegeben durch :

$$D(f_1) := \{ u \in W_{1,4}(0,1) \mid u(0)=u(1)=0 \} = \dot{W}_{1,4}(0,1)$$

$$D(f_2) := D(f_3) := \{ u \in W_{2,4}(0,1) \mid u(0)=u'(0)=u(1)=u'(1)=0 \} = \ddot{W}_{2,4}(0,1)$$

$$D(f_4) := D(f_6) := \{ u \in W_{2,2}(0,1) \mid u(0)=u'(0)=u(1)=u'(1)=0 \} = W_{2,2}(0,1)$$

$$D(f_5) := D(f_7) := \{ u \in W_{1,2}(0,1) \mid u(0)=u(1)=0 \} = \dot{W}_{1,2}(0,1) .$$

Melzer zeigt in [34], daß Clements Satz (3.5) auf die Operatoren

$A_1, \dots, A_5$ anwendbar ist und weist so die Existenz abzählbar vieler, nichttrivialer Lösungen der Eigenwertprobleme $A_i(u) = \lambda u$ ($i \in \{1, \dots, 5\}$) auf jeder Sphäre $M_r := \{ u \in H \mid \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(x) dx = r \}$ nach. Dazu muß jedoch jeweils die maximale Monotonie der Operatoren A_i nachgewiesen werden; ferner erhält man keine Charakterisierung der Lösungen als kritische Punkte der Funktionale f_i .

Wir werden nun zeigen, daß die Potentiale f_i die Voraussetzungen des Satzes (3.8) erfüllen und erhalten so ebenfalls die Existenz abzählbar vieler Lösungen der Eigenwertaufgaben $A_i(u) = \lambda u$ auf jeder Sphäre M_r . Zusätzlich können wir diese kritischen Punkte über ein inf-sup Prinzip charakterisieren und erhalten Aussagen über die Konvergenz von Näherungsverfahren zur Berechnung der kritischen Werte ($i \in \{1, \dots, 5\}$).

Für die nicht konvexen Funktionale f_6 und f_7 beweisen wir durch Anwendung der Sätze (2.9), (3.21) ganz analoge Existenzsätze.

Mit den Bezeichnungen wie in (3.6) gilt das

(4.17) LEMMA

- a) $X_{f_i} = X_i$ für $i \in \{1, \dots, 5\}$.
- b) Die Funktionale $f_i: X_i \rightarrow \mathbb{R}$ sind gerade C^1 -Funktionale und ihre Gradienten F_i sind gleichmäßig stetig auf beschränkten Teilmengen von X_i ($i \in \{1, \dots, 7\}$).
- c) Für $i \in \{1, \dots, 5\}$ und $u, v \in X_i$ gilt mit Konstanten $K_i > 0$:
- $$(F_i(u) - F_i(v), u - v) \geq K_i \|u - v\|_{f_i}^4.$$

Beweis

Wir zeigen a), b), c) nur für $i=1$; für $i=2, \dots, 5$ bzw. auch $i=6, 7$ in b) verlaufen die Beweise analog.

a) Definiere für $u \in X_1 = \dot{W}_{1,4}(0,1)$: $|u|_{1,4} := \left(\int_0^1 u^4(x) dx \right)^{1/4}$.
 $|\cdot|_{1,4}$ definiert auf $\dot{W}_{1,4}(0,1)$ eine zu $\|\cdot\|_{1,4}$ äquivalente Norm (s. [2]).
 Wir zeigen: $|\cdot|_{1,4}$ ist äquivalent zu $\|\cdot\|_{f_1}$, denn daraus folgt
 sofort : $X_{f_1} = \dot{W}_{1,4}(0,1) = X_1$.
 Nach Definition von $\|\cdot\|_{f_1}$ folgt aus $f_1\left(\frac{u \cdot \sqrt{2}}{|u|_{1,4}}\right) > 1$ schon die
 Gültigkeit von

$$|u|_{1,4} \leq \sqrt{2} \|u\|_{f_1} \quad \text{für } u \in \dot{W}_{1,4}(0,1).$$

Andererseits existiert nach (3.7)c) eine Konstante $K_1 > 0$ mit :

$$|u|_{1,4} \leq 1 \implies \|u\|_{f_1} \leq K_1 \quad \text{für alle } u \in \dot{W}_{1,4}(0,1) ;$$

also gilt für beliebiges $u \in \dot{W}_{1,4}(0,1)$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |u|_{1,4} \leq \|u\|_{f_1} \leq K_1 |u|_{1,4}.$$

b) Durch $(F_1(u), v) := \int_0^1 u'(x) v'(x) dx + \int_0^1 u'^3(x) v'(x) dx$ wird auf $X_1 := \dot{W}_{1,4}(0,1)$ ein stetiges, lineares Funktional $F_1(u) \in X_1^*$ definiert. Ferner hat man für u, v aus beschränkten Teilmengen von X_1 die Beziehung :

$$\begin{aligned} \|F_1(u) - F_1(v)\|_{X_1^*} &= \sup_{w \in X_1, \|w\|_{X_1} \leq 1} |(F_1(u) - F_1(v), w)| \\ &\leq \sup_{w \in X_1, \|w\|_{X_1} \leq 1} \left| \int_0^1 w'(x) \{u'(x) - v'(x) + u'^3(x) - v'^3(x)\} dx \right| \\ &\leq |u-v|_{1,4} + \sup_{w \in X_1, \|w\|_{X_1} \leq 1} |w|_{1,4} |u-v|_{1,4} \left\{ |u|_{1,4}^2 + \right. \\ &\quad \left. + |u|_{1,4} |v|_{1,4} + |v|_{1,4}^2 \right\} \\ &\leq \text{const } \|u-v\|_{X_1}, \end{aligned}$$

d.h.: F_1 ist gleichmäßig stetig auf beschränkten Teilmengen von X_1 .
Wegen

$$\begin{aligned} f_1(u+h) - f_1(u) - (F_1(u), h) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \{ h'^2(x) + 3u'^2(x) h'^2(x) + 2u'(x) h'^3(x) + \\ &\quad + \frac{1}{2} h'^4(x) \} dx \\ &= o(|h|_{1,4}) \end{aligned}$$

ist f_1 ein C^1 -Funktional mit Gradient F_1 .

c) Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $(a^3 - b^3)(a - b) \geq \frac{1}{4}(a - b)^4$, daher hat man für $u, v \in X_1$:

$$(F_1(u) - F_1(v), u - v) \geq \int_0^1 (u'^3(x) - v'^3(x))(u'(x) - v'(x)) dx \geq \frac{1}{4K_1} \|u - v\|_{f_1}^4. \quad \blacktriangle$$

(4.18) SATZ

Für $i \in \{1, \dots, 7\}$ gilt :

Alle Eigenwertprobleme (4.15) besitzen auf jeder Sphäre M_r in $L_2(0,1)$ unendlich viele nichttriviale Lösungen.

Die Zahlen

$$\hat{b}_j^{(i)} := \inf_{A \in M_r, \gamma(A) \geq j} \sup_{u \in A} f_i(u)$$

sind kritische Werte von f_i auf M_r und es gilt $\hat{b}_j^{(i)} \rightarrow \infty$ für $j \rightarrow \infty$.

Ist $\{V_N\}_{N=1}^\infty$ ein in X_i vollständiges System N -dimensionaler Unterräume, so konvergieren die Ritzapproximationen

$$\hat{b}_{j,N}^{(i)} := \inf_{A \in M_r \cap V_N, \gamma(A) \geq j} \sup_{u \in A} f_i(u)$$

gegen $\hat{b}_j^{(i)}$ und die zugehörige Folge kritischer Punkte $\{u_{j,N}^{(i)}\}$ des

Funktional $f_i|_{M_r \cap V_N}$ enthält eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert Lösung von $A_i(u) = \lambda u$ ist.

Beweis

Da für alle $i \in \{1, \dots, 7\}$ der Banachraum X_i kompakt eingebettet ist in dem Hilbertraum $L_2(0,1)$, ergibt sich die Behauptung aus Satz (2.9), (4.17), (3.8) und (3.9) für $i \in \{1, \dots, 5\}$; für $i=6$ und $i=7$ kann man Satz (2.9) in Verbindung mit (3.21) und (4.17) anwenden.



BEZEICHNUNGEN

$(X, (,))$	reeller, separabler, gleichmäßig konvexer Banachraum
(u, v)	$(u, v) := u(v)$ Wert des linearen, stetigen Funktionals $u \in X^*$ im Punkt $v \in X$
$(H, \langle, \rangle)$	reeller, separabler Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle, \rangle$
$(H_L, \langle, \rangle_L)$	Energieraum des positiven, selbstadjungierten Operators L
	$H_L := (\overline{D(L)}, \langle u, v \rangle_L := \langle Lu, v \rangle)$
$\{X_N\}_{N=1}^\infty$	aufsteigende Folge N-dimensionaler Unterräume von X mit in X dichter Vereinigung
P_N	$P_N: X_N \rightarrow X$ kanonischer Einbettungsoperator von X_N nach X
P_N^*	$P_N^*: X^* \rightarrow X_N^*$ adjungierter Projektionsoperator $(P_N^* u, v) = (u, P_N v)$ für $u \in X^*$ und $v \in X_N$
π_N	$\pi_N: X \rightarrow X_N$ stetige Projektion auf den endlichdimensionalen Unterraum X_N
f, g	reellwertige, stetig Frechet-differenzierbare Funktionale auf X
F, G	Frechetdifferentialie der Funktionale f, g
$M_r(g)$	$M_r := M_r(g) := \{u \in X \mid g(u) = r\} \quad r > 0$
$\hat{f}$	$\hat{f} := f _{M_r(g)}$
$f_a^b, \hat{f}_a^b$	$f_a^b := f^{-1}([a, b])$; $\hat{f}_a^b := f_a^b \cap M_r$
$f^b, \hat{f}^b$	$f^b := f_{-\infty}^b$; $\hat{f}^b := f^b \cap M_r$
$f_a, \hat{f}_a$	$f_a := f_a^{+\infty}$; $\hat{f}_a := f_a \cap M_r$
K_d	$K_d := \{u \in M_r \mid f(u) = d, F(u) = \lambda \cdot G(u)\}$
$U(x), U_\delta(x)$	Umgebung von x , offene Kugel um x mit Radius δ
$U(A), U_\delta(A)$	offene Menge, die A enthält; $U_\delta(A) := \{u \in X \mid \text{dist}(x, A) < \delta\}$
$\{x_n\}_{n=1}^\infty$	Folge in X , Teilfolgen werden <u>nicht</u> gesondert bezeichnet
$x_n \xrightarrow{X} x$	starke Konvergenz in X
$x_n \xrightarrow{X} x$	schwache Konvergenz in X
$\lambda(u)$	$\lambda(u) := (F(u), u) / (G(u), u)$
$\alpha(u)$	$\alpha(u) := \ G(u)\ _{X^*} \ u\ _X / (G(u), u) $

Literaturverzeichnis

- 1 H.Amann, Ljusternik-Schnirelmann Theory and nonlinear eigenvalue-problems, Math. Annalen 199,1972,55-72
- 2 R.Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York,San Francisco, London 1975
- 3 P.Bader, Methode variationnelle pour l'equation de Hartree
Dissertation, EPF Lausanne , Dep. Math. 1976
- 4 N.W.Bazley, Approximation of operators with reproducing nonlinearities
Manuscripta Math. 18,1976,353-369
- 5 N.W.Bazley, R.Seydel Existence and bounds for critical energies of
the Hartree operator, Chem. Phys. Letters 24, 1974, 128-132
- 6 V.Benci, D.Fortunato, F.Zirilli, Exponential decay and regularity
properties of the Hartree approximation to the bound state wave-
functions of the Helium atom. J.Math. Phys. 17,1976,1154-1155
- 7 M.S.Berger, M.S.Berger, Perspectives in nonlinearity
Benjamin, New York 1968
- 8 M.S.Berger, On the existence and structure of stationary states for
a nonlinear Klein-Gordon equation, J.Functional Analysis 9,1972,249-261.
- 9 R.Behling,A.Bongers,T.Küpper, Upper and lower bounds to critical
values of the Hartree operator, Int.J.of Quantum Chem.,10,1976,985-992

- 10 A.Bongers, A convergence theorem for Ritz-approximations of eigenvalues with application to CI-calculation, Chem. Phys.Letters 49,1977,393-398.
- 11 G.Bonitz, Zum Ritzschen Verfahren, VEB, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1971
- 12 H.Brezis, Operateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert, North Holland Publ.Comp.,Amsterdam 1973
- 13 F.E.Browder, Variational methods for nonlinear elliptic eigenvalue problems, Bull. Amer. Math. Soc. 71,1965,176-183
- 14 F.E.Browder, Nonlinear eigenvalue problems and Galerkin-approximations Bull. Amer. Math. Soc., 74,1968,651-656
- 15 F.E.Browder, Nonlinear eigenvalue problems and group invariance, Functional Analysis and related Fields, Springer, New York,1970,1-58
- 16 F.E.Browder, Existence theorems for nonlinear partial differential equations, Proc. Symp. Pure Math., Amer.Math.Soc 16,1970,1-60.
- 17 D.Clark, A variant of the Ljusternik-Schnirelmann Theory Indiana Univ.Math.J. 22,1972,65-74
- 18 P.Clement, Eigenvalue problems for a class of cyclically maximal monoton operators, MRC Technical Summary Report 1976

- 19 C.Coffmann, Ljusternik-Schnirelmann Theory and eigenvalue problems for monotone potential operators, J.Functional Analysis 14,1973,237-252.
- 20 S.Fucik,J.Necas, Ljusternik-Schnirelmann Theorem und nichtlineare Eigenwertprobleme, Math. Nachrichten 53,1972,277-289
- 21 S.Fucik,J.Necas et al. Spectral analysis of nonlinear operators, Springer, Lecture Notes in Mathematics, Bd. 346, 1973
- 22 S.Fucik,J.Necas, Krasnoselskiis main bifurcation theorem, Arch.Rat.Mech.Anal. 54/55, 1974, 328-339.
- 23 K.Gustafson, D.Sather, A branching analysis of the Hartree equation Rend.Math.Roma 4,1971,723-734
- 24 T.Kato Fundamental properties of Hamiltonian operators of Schrödinger type, Trans.Amer.Math.Soc. 70,1951,195-211.
- 25 T.Kato Perturbation theory for linear operators, Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1966
- 26 T.Kato Nonlinear semigroups and evolution equations, J.Math.Soc.Japan 13,1967,508-520.
- 27 B.Klahn Die Konvergenz des Ritz'schen Variationsverfahrens in der Quantenchemie, Dissertation, Göttingen 1975
- 28 M.A.Krasnosel'skii Topological methods in the theory of nonlinear integral equations, Pergamon Press, New York 1964

- 29 E.H.Lieb Existence and uniqueness of minimizing solutions of Choquard's nonlinear equation, Studies in Appl.Math. 57,1977,93-105.
- 30 Ljusternik,Schnirelmann, Sur un principe topologique d'analyse C.R.Acad.Sci.Paris 188,1920,295-297
- 31 H.W.Melzer Über die kompakte Invertierbarkeit maximal monotoner Operatoren Dissertation, Köln 1976
- 32 S.G.Michlin The numerical performance of variational methods, Wolters-Noordhoff Publ., Groningen 1971
- 33 J.Naumann Ljusternik-Schnirelmann Theorie und nichtlineare Eigenwertprobleme, Math. Nachrichten 53,1972,303-336
- 34 J.Naumann Variationsmethoden für Existenz und Bifurkation von Lösungen nichtlinearer Eigenwertprobleme I,II, Math. Nachrichten 54,1972,285-296 (55,1973,325-344)
- 35 Z.Nehari On a nonlinear differential equation arising in nuclear physics, Proc. Royal Irish Acad. 63,1963,
- 36 R.Palais Critical point theory and the minimax principle, Global Analysis, Proc.Symp.Pure Math. 15,1970,185-212.
- 37 R.Palais Ljusternik Schnirelmann Theory on Banachmanifolds Topology 5,1966,115-132.

- 38 P.Rabinowitz Some aspects of nonlinear eigenvalue problems
Rocky Mountain J. of Math. 3,1973, 161-202
- 39 M.Reeken General theorem on bifurcation and its applications to
the Hartree equation of the Helium atom, J.Math.Phys. 11,1970,2505-2512.
- 40 M.Reeken Stability of critical points under small perturbations
Part I: Topological theory, Manuscripta Math. 7,1972,387-411
- 41 M.Reeken Stability of critical points under small perturbations
Part II: Analytic theory, Manuscripta Math. 8,1973,69-92
- 42 M.Reeken Stability of critical values, Manuscripta Math. 12,1974,
163-193
- 43 R.Rockafellar On the maximal monotonicity of subdifferential
mappings, Pacific J.of Math. 33,1970,209-216.
- 44 W.Strauss Existence of solitary Waves in higher dimensions,
Commun. Math.Phys. 55,1977,149-162.
- 45 C.A.Stuart Bifurcation for variational problems when the linearisation has no eigenvalues, erscheint noch
- 46 C.A.Stuart Existence theory for the Hartree equation, Arch.Rat.
Mech.Anal. 51,1973,60-69.

- 47 C.A.Stuart An example in nonlinear functional analysis: the Hartree equation, J.Math.Anal.Appl. 49, 1975, 725-733
- 48 M.M.Vainberg Variational methods for the study of nonlinear operators, Holden Day Inc., San Francisco,London,Amsterdam 1964
- 49 J.Wokowisky Existence of solutions of the Hartree equation for N electrons. An application of the Schauder Tychonoff theorem. Indiana Univ.Math.J. 22,1972,551-568
- 50 E.Zeidler Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis III : Variationsmethoden und Optimierung. Teubner Texte zur Mathematik Leipzig 1978

Lebenslauf:

Name: Bongers

Vorname: Achim Ludger

geboren: 04.07.1950 in Krefeld

Familienstand: verheiratet seit dem 20.12.1978 mit der Sportstudentin
Gabriele Mondroch

Eltern: Gerhard Anna Bongers
Gertrud Anna Bongers, geb. Niessen
wohnhaft in Krefeld, Gutenbergplatz 8

Schulischer Werdegang:

1957-1961 : Kath. Volksschule 33 in Krefeld

1961-1969 : Ernst-Moritz-Arndt Gymnasium Krefeld
Abschluß: Reifeprüfung

WS 1969/70: Immatrikulation an der Albertus Magnus-Universität Köln
Hauptfach: Mathematik, Nebenfach: Physik

Okt.1971: Vordiplom

Okt.1975: Diplom

Okt.1975-Aug.1977: Stipendiat des Max-Planck-Instituts für Strahlenchemie
in Mülheim an der Ruhr

seit 1.9.1977: wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich Mathematik
der Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Mainz, den 2.5.1979

Achim Bongers

